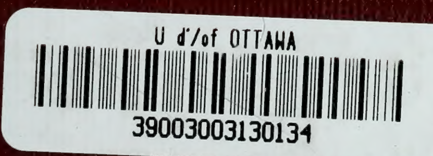
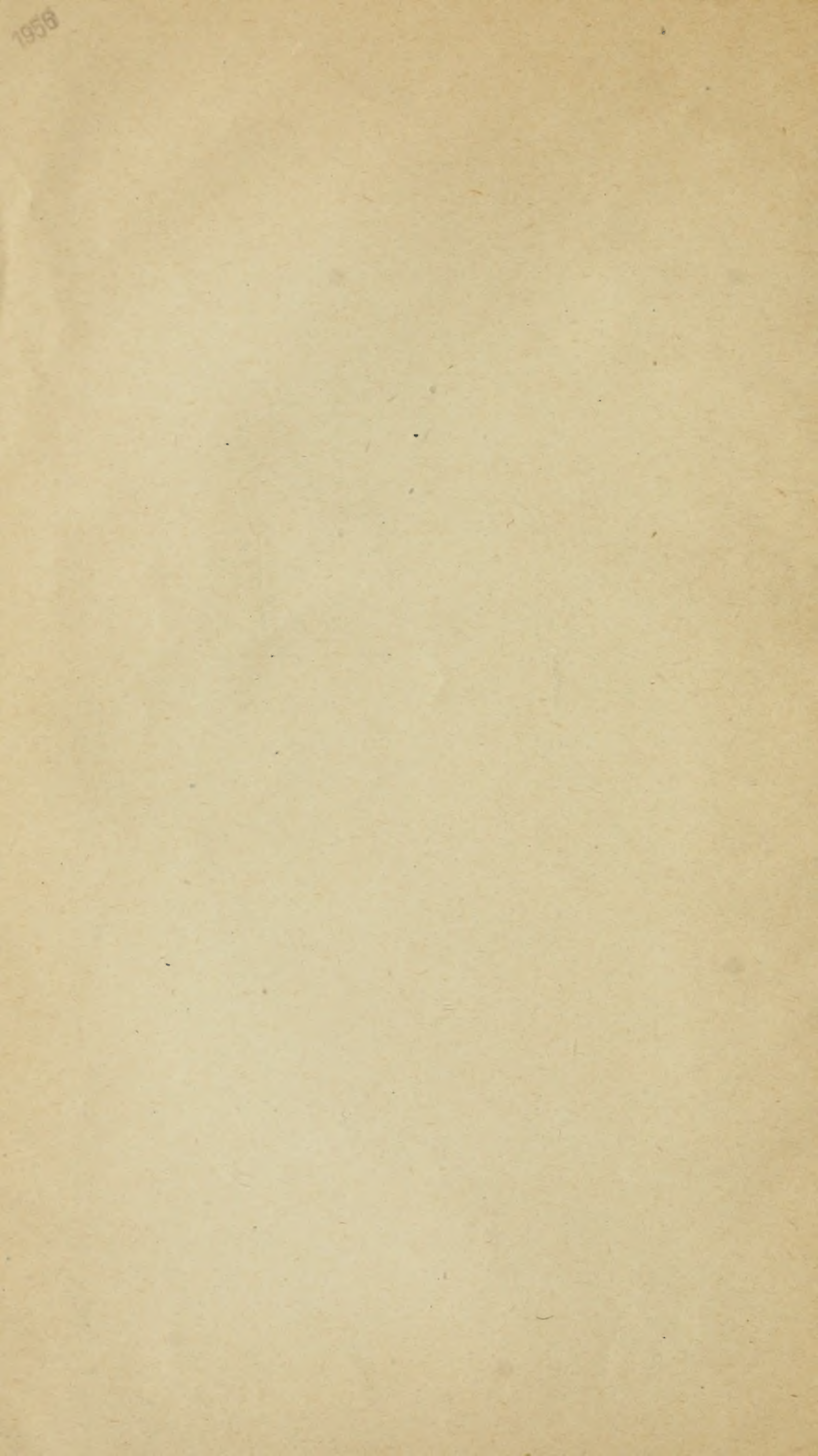





1956

LA

PHILOSOPHIE GÉOMÉTRIQUE

DE

HENRI POINCARÉ

DU MÊME AUTEUR

F. Enriques. **Les Concepts fondamentaux de la science**, traduit de l'italien par Louis Rougier, Flammarion, in-16, 1913 . . . . **3 fr. 50**

La Matérialisation de l'énergie, essai sur la théorie de la Relativité et sur la théorie des Quanta, Gauthier-Villars, in-16, 1919 . . . . **3 fr. 50**

Les Paralogismes du Rationalisme, essai sur la théorie de la connaissance, Félix Alcan, in-8, 1920 . . . . **15 francs**

Lyon. — Imprimerie A. Rey, 4, rue Gentil. — 78659

LA PHILOSOPHIE GÉOMÉTRIQUE DE HENRI POINCARÉ

PAR

Louis ROUGIER

Professeur agrégé de Philosophie

Docteur ès lettres

PARIS

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN (VIe)

1920



A Monsieur Jules RICHARD

Hommage cordial.

L. R.

LA

PHILOSOPHIE GÉOMÉTRIQUE

DE

HENRI POINCARÉ

PRÉFACE

La logique traditionnelle, telle qu'on la trouve exposée chez les Rationalistes classiques, repose sur le dilemme suivant : les principes des sciences sont ou des vérités rationnelles, ou des vérités empiriques. Les vérités rationnelles sont *a priori*, universelles, éternelles, analytiques et nécessaires ; les vérités empiriques sont *a posteriori*, singulières, révisibles, synthétiques et contingentes. A ces deux catégories de principes correspondent deux sortes de sciences : les sciences rationnelles et les sciences de la nature, les premières de vérité nécessaire, les secondes de vérité contingente. Ces deux sortes de vérité relèvent de deux facultés bien distinctes : l'entendement discursif qui élabore des concepts empiriques et qui enchaîne des syllogismes ; la raison, une et

entière en chacun de nous, qui est le lieu des vérités nécessaires. La raison apparaît dans la nature comme « un empire dans un empire », et la question de son origine pose un problème métaphysique considérable.

Kant a essayé de se soustraire à ce dilemme, en reconnaissant une troisième alternative : il existe des jugements synthétiques *a priori*, issus d'une législation de l'esprit sur la nature, dont la nécessité est subjective en ce sens que, s'appliquant au monde phénoménal de l'expérience, ils ne valent pas pour monde nouménal des choses en soi. L'existence des jugements synthétiques *a priori* implique la présence en nous d'une structure mentale spécifique, dont l'origine est tout aussi mystérieuse que la raison des philosophes classiques.

Pour échapper à ce mystère, les empiristes se sont efforcés à ramener les axiomes des sciences dites rationnelles à des généralisations empiriques fondées sur l'induction : telle est l'idée maîtresse qui commande le *Traité de logique inductive et déductive* de Stuart Mill. Cette conception se heurte à une difficulté insurmontable. Si les sciences mathématiques, sciences rationnelles par excellence, reposent sur des vérités empiriques, rien ne les distingue plus de celles de la nature : elles deviennent, comme elles, approximatives et révisibles, et perdent le caractère de certitude et d'exactitude que tout le monde s'accorde à leur reconnaître. La correction qu'apporte Taine, dans son livre *l'Intelligence*, à l'empirisme du logicien anglais, pour sauvegarder l'apodicité des mathématiques, est une concession au rationalisme. Il existe, dit Taine, une opération intellectuelle que Stuart Mill a systématiquement négligée : c'est l'abstraction. Les axiomes mathématiques sont des propositions

abstraites, nécessaires parce qu'analytiques : « Les axiomes sont des propositions analytiques, où le sujet contient l'attribut, soit d'une façon très visible, ce qui rend l'analyse inutile, soit d'une façon très masquée, ce qui rend l'analyse presque impraticable[1]. »

Les philosophes ne se sont jamais entendus sur les sciences auxquelles il convient d'attribuer le qualificatif de rationnelles. Au XVIIIe siècle, par exemple, le débat était vif pour savoir si les principes de la mécanique étaient des vérités nécessaires ou des vérités contingentes ; et, cédant aux préoccupations de l'époque, l'Académie de Berlin fit de ce problème un sujet de concours. Il est toutefois des sciences considérées unanimement comme rationnelles : ce sont les sciences mathématiques. Au sujet de leurs principes, la logique traditionnelle, en tenant compte de la solution kantienne, nous met donc en face de ce trilemme : ces principes sont des *jugements analytiques*, ou des *jugements synthétiques a priori*, ou des *jugements empiriques ;* dans les deux premiers cas, ces principes sont des vérités apodictiques ; dans le troisième, ce sont des vérités assertoriques.

Ce sera l'incomparable mérite d'Henri Poincaré d'avoir établi que ce *trilemme n'est pas de mise.* Il existe une solution, dont ne s'était avisé aucun des philosophes classiques, et qui est la bonne : les principes des sciences mathématiques ne sont ni des vérités apodictiques, ni des vérités assertoriques : ce sont des *définitions déguisées,* c'est-à-dire des *conventions.* Ces conventions sont facultatives, en ce sens qu'elles sont choisies entre plusieurs autres possibles ; mais leur choix n'est pas

[1] *L'Intelligence*, t. II, p. 336.

arbitraire, en ce sens qu'il est guidé par des raisons de commodité théorique et de convenance pratique : l'expérience nous le suggère, sans toutefois l'imposer.

C'est, précisément, parce qu'elles reposent sur des conventions initiales que les mathématiques sont apodictiques. Elles constituent des théories déductives, dont la vérité est purement formelle. Le mathématicien est tenu seulement de rester d'accord avec les décrets qu'il a librement posés, sous la seule réserve d'être cohérents, et dont il saisit par avance tout le contenu. Il n'a pas de compte à rendre par devant une réalité objective qui se dérobe toujours en partie à une analyse exhaustive, comme dans les sciences de la nature.

Le caractère conventionnel de l'analyse a été souvent reconnu ; il n'en est pas de même pour la géométrie. Les théorèmes géométriques semblent bénéficier d'une double certitude : à la nécessité apodictique, qui procède de la démonstration, ils joignent l'évidence sensible, qui résulte de l'intuition spatiale. Ils semblent comporter ainsi une double vérité : la vérité formelle, qui consiste dans la cohérence logique du discours ; la vérité matérielle, qui réside dans l'accord de la pensée avec son objet. « Les vérités géométriques, dit Ampère, ont une réalité objective qui ne se trouve pas dans celle de l'arithmologie[1]. » Aussi est-ce à la géométrie ordinaire que les Rationalistes classiques ont emprunté le plus volontiers leurs exemples. Comme le dit excellemment Russell, si l'on veut bien remplacer, dans le passage suivant, le terme d' « Idéalistes » par celui de « Rationalistes » : « Pendant le XVII[e] et le XVIII[e] siècles, la Géométrie est

[1] Ampère, *Essai sur la philosophie des Sciences*, p. 64.

restée la forteresse inexpugnable des idéalistes dans la guerre contre l'empirisme. Ceux qui soutenaient, comme on le faisait généralement sur le continent, qu'on peut avoir une connaissance certaine indépendante de l'expérience et portant sur le monde réel, n'avaient qu'à montrer la Géométrie : personne, si ce n'est un insensé, disaient-ils, n'élèverait de doute sur sa validité, et nul autre qu'un fou ne pourrait nier son application *objective*[1]. »

C'est donc appliquée à la géométrie, que la thèse de Poincaré devait sembler surtout subversive ; c'est en géométrie que ses incidences philosophiques étaient susceptibles du plus grand retentissement ; c'est à l'imposer en géométrie que Poincaré devait consacrer la majeure partie de ses efforts ; c'est en cette matière que sa pensée a été le plus souvent défigurée, travestie, sollicitée en des sens divers, en vue des utilisations les plus variées.

Cet ouvrage est consacré à l'exposé du « conventionalisme » géométrique de Poincaré. Toutefois, étant donnée l'étendue du sujet, on a éprouvé le besoin de se restreindre. Les spéculations de Poincaré ont porté, tour à tour, sur l'*Analysis Situs* ou Topologie, sur la géométrie projective, sur la géométrie métrique, et, plus particulièrement, sur le postulat métrique d'Euclide et l'axiome topologique des trois dimensions. Laissant délibérément de côté les autres principes des deux premières géométries, il ne sera ici question que des postulats de la géométrie métrique et de l'axiome des trois dimensions.

[1] Russell, *Essai sur les fondements de la Géométrie*, trad. Cadenat, Paris, 1901, p. 1.

La procédure adoptée est la suivante. L'expression de la pensée de Poincaré est extrêmement elliptique et, souvent, d'apparence paradoxale. Pour être comprise, elle nécessite des connaissances techniques qui font défaut à la plupart de ceux qui l'abordent, croyant de bonne foi qu'elle s'adresse au grand public. Or, on ne peut fructueusement en disserter, qu'après s'être initié à la théorie logique de la déduction, à l'étude géométrique des métriques non-euclidiennes, à la théorie analytique des groupes de transformations. Aussi, avons-nous tout d'abord dû songer à écrire les prolégomènes logiques et mathématiques propres à rendre accessible aux philosophes la lecture de l'œuvre épistémologique de Poincaré. C'est à quoi s'emploie la première partie de ce travail. Elle trouve son unité, en se présentant, tout naturellement, comme un exposé des origines et du développement des métriques non-euclidiennes. Le point de départ des spéculations de Poincaré, qui devait le conduire à sa théorie de la convention, se trouve, en effet, dans la découverte qu'il fit, au cours de ses recherches sur les fonctions fuchsiennes, d'une interprétation euclidienne remarquable des géométries non-euclidiennes.

La seconde partie est consacrée à l'exposé de la théorie de la convention et des critiques adressées par Poincaré aux doctrines adverses : à l'empirisme et au kantisme. Ce faisant, nous n'avons pas compris notre rôle à la façon d'un rapporteur passif, simplement soucieux d'être fidèle. Prenant fait et cause pour la doctrine que nous exposions, nous nous sommes appliqué à la préciser en maints points qui appelaient d'indispensables compléments. Nous avons montré comment la confirment les utilisations récentes qui ont été faites, dans la physique de la relativité, des

géométries non-euclidiennes et de la géométrie à quatre dimensions. En particulier, le caractère obscur de la notion de convention étant souvent incriminé, nous avons pris soin de l'élucider, en distinguant différentes sortes de conventions. Il y a là les premiers linéaments d'une *Logique de la convention*, qui mérite de trouver droit de cité, dans l'avenir, à côté de la Logique des classes, des propositions et des relations.

Cet essai procède directement des préoccupations d'esprit qui ont inspiré la rédaction de notre ouvrage *les Paralogismes du Rationalisme*. Ce dernier travail, comme son nom l'indique, est essentiellement critique. Il se borne à dénoncer les paralogismes contenus dans les arguments par lesquels on prétend accréditer la croyance en l'existence de vérités *a priori*, indépendantes de notre esprit et de la nature. Il établit que ces arguments sont dénués de valeur probante. Mais il garde généralement toute réserve sur la question de savoir quelle est la vraie nature des énonciations considérées jusqu'ici comme des vérités éternelles : sont-elles des propositions formelles, des vérités hypothétiquement nécessaires, des généralisations empiriques, des hypothèses heuristiques ou de simples conventions et de quelle sorte ? La réponse, en vérité, varie dans chaque cas particulier ; et, dans chaque cas, elle peut n'être point univoque : une même énonciation peut fort bien appartenir simultanément, suivant les points de vue sous lesquels on l'examine, à des catégories d'énonciations fort distinctes. Il nous a paru, dès lors, suggestif et piquant de montrer, sur un exemple particulièrement significatif, comment les principes que les Rationalistes ont considérés par excellence comme des *vérités a priori et nécessaires*, indépendantes

de l'esprit et de la nature, se ramènent à des *conventions commodes*, qui ne nous paraissent évidentes qu'en vertu de certaines *contingences empiriques* du milieu qui nous sert d'habitat.

PREMIÈRE PARTIE

PROLÉGOMÈNES LOGIQUES ET MATHÉMATIQUES

LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

CHAPITRE PREMIER

LA GÉOMÉTRIE EN TANT QUE THÉORIE DÉDUCTIVE

I. — Nature formelle d'une théorie déductive.

Toute théorie déductive consiste en un double processus de réduction : réduction des notions les unes aux autres par définition, réduction des propositions les unes aux autres par démonstration. Définir une notion, c'est la ramener, à l'aide des seules opérations de la logique, à une combinaison de notions plus simples ; démontrer une proposition, c'est la ramener, au moyen des seules implications et substitutions permises par les règles du calcul logique, à une combinaison formelle d'autres propositions, admises pour vraies ou précédemment démontrées. Ce double processus de réduction ne peut être indéfiniment poursuivi. Il est nécessaire de s'arrêter à un petit nombre de notions indéfinissables, auxquelles on puisse réduire toutes les autres à l'aide de définitions

[1] Abréviations. — Nous utiliserons les abréviations suivantes : *La Science et l'Hypothèse* : *S. H.* ; — *La Valeur de la Science* : *V. S.* ; — *Science et Méthode* : *S. M.* ; — *Dernières Pensées* : *D. P.* ; — *Revue de Métaphysique et Morale* : *R. M. M.*

nominales ; à un petit nombre de propositions indémontrables, auxquelles on puisse ramener toutes les autres à l'aide de démonstrations. Toute théorie déductive comprend ainsi deux sortes de notions et de propositions : les notions premières, qui sont nominalement indéfinissables et les notions dérivées, définissables à partir d'elles ; les propositions premières, qui sont indémontrables, appelées indifféremment dans la suite *axiomes*, *postulats* ou *principes*, et les propositions dérivées, démontrables à partir d'elles, que l'on nomme communément *théorèmes*.

Toute théorie déductive repose ainsi sur un système de notions et de propositions premières, indéfinissables et indémontrables.

Le choix d'un système de notions et de propositions premières est *conventionnel*, *indéterminé*, mais *non arbitraire*.

1° Il est *conventionnel* en ce sens qu'*aucune signification absolue ne s'attache aux qualificatifs d'indéfinissable et d'indémontrable, de notion première et de proposition première*. Une notion n'est indéfinissable et une proposition indémontrable que par rapport à un certain système de définitions et à un certain ordre de démonstrations ; avec un autre système et selon un autre ordre, les mêmes notions peuvent être définies et les mêmes propositions démontrées. Ainsi, pour exposer déductivement la géométrie métrique d'Euclide, une infinité de systèmes de notions et de propositions premières, tous équivalents entre eux, sont possibles. M. Peano prend comme premières les notions de *point* et de *segment ;* M. Pieri, celles de *point* et de *mouvement ;* M. Veblen, de *point* et d'*ordre ;* M. Padoa, de *point* et de *distance de deux points ;* M. Hilbert, de *point*, *droite*, *plan*, *situé sur*, *situé entre*, *parallèle*, le choix des propositions premières variant dans chaque cas avec celui des notions.

Tous ces systèmes sont équivalents, c'est-à-dire qu'on peut en déduire le même corps de propositions. Ce qui importe, c'est donc moins le système variable des notions et des propositions premières, que l'ensemble permanent de leurs conséquences. Demander si une notion est définissable ou si une proposition est indémontrable, sans spécifier à quel système de notions et de propositions premières on se réfère, est une question aussi vide de sens que demander si un corps est en repos ou en mouvement, sans préciser à quel système de coordonnées on le rapporte. La question : *Le postulat d'Euclide est-il démontrable, en partant des autres postulats énoncés par Euclide?* a un sens ; mais demander d'une façon absolue : *Le postulatum est-il démontrable?* n'en a aucun, parce qu'il n'existe pas de notions et de propositions géométriques que l'on puisse considérer absolument comme premières.

2° Le choix d'un système est *indéterminé*, en ce sens qu'*aucune signification particulière, intuitive, concrète, psychologique, ne s'attache aux notions premières d'une théorie déductive.* On doit traiter ces notions comme des symboles non définis et raisonner sur eux, c'est-à-dire opérer les transformations permises par le calcul logique, sans se préoccuper de savoir ce qu'ils représentent. C'est ce qui fait dire à Russell : « La mathématique est une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce qu'on dit est vrai ». L'avantage d'une telle procédure est d'éliminer tout appel à l'intuition dans la suite des déductions. Tout appel à l'intuition risque de faire intervenir implicitement un postulat nouveau[1] et substitue, dans le cas le plus favorable, l'évidence assertorique, que procure l'in-

[1] Comp. *S. M.*, p. 157 : « Dans les raisonnements où l'intuition joue encore un rôle, dans les raisonnements vivants pour ainsi dire, il est difficile de ne pas introduire un axiome ou un postulat qui passe inaperçu. »

tuition spatiale, à la nécessité apodictique que dispense seul le raisonnement.

Ce que l'on perd ainsi en détermination, on le gagne en généralisation. Puisque la vérité des propositions que l'on déduit est indépendante de l'interprétation des notions premières sur lesquelles on raisonne, une théorie déductive a un caractère purement *formel*, indépendant de la *matière* à laquelle on l'applique. *C'est une sorte de schème logique, un barème de déductions toutes faites qui peuvent s'appliquer aux objets matériellement les plus divers*, pourvu que ceux-là vérifient les relations énoncées dans les propositions premières entre les symboles non définis de la théorie. *Il peut donc y avoir plusieurs interprétations, matériellement différentes, d'une même théorie déductive.* C'est ainsi, comme nous le verrons[1], que Poincaré a pu fournir trois interprétations euclidiennes différentes de la géométrie de Lobatchefski, envisagée d'un point de vue formel comme un simple système déductif. C'est ce qui l'a conduit à écrire : « Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse[2]. »

3° Tout en étant conventionnel et indéterminé, le choix d'un système n'est pas pour cela *arbitraire*. Il est tenu à respecter deux conditions nécessaires: *la suffisance* et *la cohérence*.

Un système est suffisant si, en partant des notions et des propositions choisies comme premières, on peut définir toutes les autres notions et démontrer toutes les autres propositions de la science considérée. Il est cohé-

[1] *Vide infra*, chap. IV.
[2] *S. H.*, p. 32.

rent, si les propositions premières sont compatibles, c'est-à-dire ne conduisent à aucune contradiction dans la suite.

Pour établir la cohérence d'un système de postulats, on peut suivre deux méthodes : l'une intuitive, l'autre logique. La première repose sur le principe : *tout ce qui est réel est possible*, en entendant par réel ce qui existe empiriquement ou ce qui peut se figurer intuitivement. On cherche alors à donner des symboles non définis d'une théorie une interprétation concrète qui vérifie toutes les relations énoncées dans les propositions premières. Ainsi, pour écarter de la planimétrie non-euclidienne le soupçon d'incohérence, Beltrami l'interprète comme la métrique des surfaces à courbure constante, en faisant correspondre aux droites non-euclidiennes les géodésiques de ces surfaces. La méthode logique est relative : elle s'applique à tous les cas, sauf un. Elle consiste en ceci : une fois admise la cohérence des notions et des propositions premières d'une certaine théorie, on cherche à donner des symboles non définis d'une seconde théorie une interprétation fondée sur la première. Une fois admise, par exemple, la compatibilité des postulats de la géométrie projective ou de la géométrie ordinaire, on ramène à ceux-là les propositions des métriques non-euclidiennes. La présomption que ces disciplines ne soient pas contradictoires, se trouve ramenée à celle de la compatibilité des principes posés par von Staudt ou Euclide : c'est la voie suivie par Cayley, Klein et Poincaré. La cohérence des propositions d'Euclide peut être garantie à son tour par celle des principes de l'analyse, en traduisant les propositions géométriques sous forme d'équations, par l'emploi des coordonnées : on obtient des relations analytiques dont la non-contradiction, par suite de l'arithmétisation des mathématiques, dépend de celle des principes de l'arithmétique. Mais des principes de l'arithmétique on

peut donner une interprétation logistique que M. Pieri a développée, ainsi que MM. Russell et Whitehead. En fin de compte, la cohérence des sciences mathématiques se trouve ramenée à celle de la logistique.

Hilbert s'est demandé si on ne pourrait pas arriver à prouver directement la non-contradiction des axiomes d'une science déductive[1]. Il l'a entrepris pour les principes de l'arithmétique. Sa tentative était nécessairement vouée à l'échec, et Poincaré ne s'est pas fait faute de la critiquer[2]. En effet, les contradictions ou les dépendances des propositions peuvent être démontrées par des raisonnements apodictiques, au lieu que les non-contradictions ou les indépendances des propositions ne peuvent être établies que par des constatations assertoriques.

D'autres desiderata peuvent être requis, d'ordre quasi-esthétique et, à ce titre, nullement exigibles : ce sont l'indépendance, l'irréductibilité ou la nécessité des notions et propositions premières, et leur plus grande économie possible.

On dit que les notions premières sont indépendantes, quand aucune d'elles ne peut être définie au moyen des autres, en partant des postulats qui déterminent leurs relations ; on dit que les propositions premières sont indépendantes, quand aucune d'elles ne peut être démontrée au moyen des autres. Pour établir qu'une notion est indépendante des autres notions premières, il faut et il suffit de changer son interprétation, sans modifier celle des autres : si elle pouvait se définir au moyen de celles-ci, sa signification serait déterminée univoquement dès qu'on aurait fixé leur sens, et on ne pourrait modifier son inter-

[1] D. Hilbert, *Ueber die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, ap. *Verhandl. III. Int. Math.-Kongr. in Heidelberg*, 1904; *Grundlagen der Geometrie*, 3e Aufl., Leipzig, 1899, Anhang VII.
[2] *S. M.*, p. 179-185.

prétation qu'au prix de celle de toutes les autres. Par conséquent, pour établir qu'un système de notions premières est irréductible, *il faut et il suffit qu'on puisse trouver une interprétation pour chacune d'elles, qui vérifie le système des propositions premières et qui continue à le vérifier quand on change le sens de la seule notion considérée.* Pour établir qu'un postulat est indépendant des autres, on montre que la proposition contraire est compatible avec les autres postulats ; pour établir qu'un système de postulats est irréductible, *il faut et il suffit alors qu'on puisse trouver, pour chacun d'eux, une interprétation du système des symboles non définis, qui vérifie tous les postulats, sauf celui-là.* Ainsi les interprétations intuitives des géométries non-euclidiennes montrent l'indépendance du postulat d'Euclide à l'égard des autres axiomes de la géométrie métrique ordinaire. Dans ce cas, on dit qu'on a démontré l'*indépendance absolue* des propositions entre elles. Il arrive, en effet, qu'on puisse seulement établir leur *indépendance ordonnée*, c'est-à-dire montrer que chacune d'elles est indépendante de la précédente.

Le desideratum de la plus grande économie possible consiste à réduire au minimum le nombre des notions et des propositions choisies comme premières. Cette condition est souvent obtenue au détriment de la clarté et de l'aisance de l'exposition.

Les notions premières d'une théorie déductive désignent, soit des classes d'objets indéterminés, soit des relations. Ces relations peuvent être logiques ou spéciales. Dans le premier cas, elles s'expriment directement à l'aide d'algorithmes logiques. Dans le second cas, elles requièrent des symboles spéciaux, dénués de toute signification particulière, mais caractérisés uniquement par leurs relations formelles (symétrie, transitivité, uniformité, etc...),

telles que permet de les formuler la *Logique des relations* de Russell. Dès lors, toute relation concrète particulière, qui jouit des mêmes relations formelles, constitue une interprétation possible d'un symbole spécial de relation.

Les propositions premières de la géométrie ont été distinguées par les Anciens, suivant l'exemple d'Aristote, d'Euclide et de Proclus, en axiomes et en postulats. Les axiomes seraient évidents *ex terminis*, ils seraient vrais par eux-mêmes καθ' ἑαυτα : ce seraient des jugements analytiques, inconditionnellement nécessaires ; les postulats seraient des jugements synthétiques, dont l'évidence ne serait pas immédiate, mais qui seraient requis au cours des démonstrations. Les axiomes exprimeraient des propriétés communes à tous les ordres de grandeurs, d'où leur dénomination de *notions communes ;* les postulats ne s'appliqueraient qu'à une seule espèce de grandeurs : les axiomes énonceraient les propriétés générales des grandeurs de tout ordre ; les postulats réclameraient la possibilité d'effectuer certaines constructions particulières, assumant, à l'égard des axiomes, le même rôle que les problèmes de construction par rapport aux théorèmes. Pour jouir d'une très longue prescription, la distinction entre les axiomes et les postulats est aujourd'hui surannée. Locke et Leibniz remarquaient déjà que les axiomes, conçus à la façon d'Euclide, ne remplissent aucun rôle effectif dans les démonstrations. En réalité, ou bien ils se ramènent à des propositions de logique qui servent comme règles de déduction, ou bien ce sont des principes propres à la science dont il s'agit, et par suite des postulats. Par exemple, l'axiome euclidien : « Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles » se ramène à la règle logique de la transitivité de l'égalité ; mais, dans son usage géométrique, il signifie que les objets, qu'on est convenu d'appeler segments et angles,

jouissent d'une certaine relation transitive (congruence), ou encore que les déplacements forment un groupe. A la distinction des axiomes et des postulats, il convient de substituer celle des *principes logiques* et des *principes propres des sciences spéciales*. Ceux-ci, comme nous l'avons montré ailleurs[1], se divisent en trois groupes : les *postulats d'existence*, qui affirment l'existence logique des objets désignés par les symboles non définis, et les *postulats d'unicité*, qui énoncent qu'une certaine classe a un seul objet, c'est-à-dire que deux objets quelconques d'une même classe sont identiques ; les *principes formateurs*, qui permettent, en partant des objets dont l'existence a été postulée, d'en construire indéfiniment de nouveaux par récurrence ; les *axiomes de relation*, qui expriment l'existence de certaines relations entre les objets postulés ou construits.

Les *principes formateurs* et les *axiomes de relation* constituent ce que les logisticiens appellent des *fonctions propositionnelles*. Appelons *variable* un terme indéterminé, un symbole non défini, auquel on peut substituer un terme déterminé qui en constitue une certaine interprétation et que l'on nomme une valeur constante de la variable ; appelons *fonction* toute expression qui contient une ou plusieurs variables ; appelons *proposition* une énonciation susceptible de vérité ou de fausseté ; une *fonction propositionnelle* sera une fonction qui devient une proposition toutes les fois que l'on substitue aux variables qui y figurent des valeurs constantes. La fonction logique : « x est la capitale de la France » en est une, car c'est une proposition pour toutes les valeurs constantes attribuées à x (vraie pour $x =$ Paris, fausse pour toutes les autres valeurs). Une fonction proposition-

[1] L. Rougier, *la Démonstration géométrique et le Raisonnement déductif*, ap. *R. M. M.*, novembre 1916, p. 809-858.

nelle n'est pas par elle-même une proposition, car elle n'est ni vraie, ni fausse. Elle devient une proposition vraie ou fausse, lorsque l'on remplace les variables par des valeurs constantes : c'est un *schème de proposition* ou encore *un moule logique à propositions*. Ainsi, une équation algébrique contenant plusieurs variables est une fonction propositionnelle. En effet, elle peut être vraie pour certains systèmes de valeurs et fausse pour les autres ; mais elle n'a de sens (elle n'est vraie ou fausse) que si l'on assigne aux variables des valeurs déterminées, d'ailleurs tout à fait quelconques; sinon elle reste une forme vide, le schème d'une infinité de propositions possibles.

Il importe de remarquer que les propositions premières d'une théorie déductive ne sont pas à proprement parler des propositions : ce sont des fonctions propositionnelles qui caractérisent équivoquement les symboles non définis de la théorie, comme un système d'équations à plusieurs inconnues caractérise ces inconnues, dans le cas où il détermine leur valeur d'une façon *équivoque* (car si le système d'équations n'admettait qu'une solution, on pourrait obtenir une définition explicite et nominale de chacune des inconnues). Par exemple, en géométrie, les symboles non définis désignent des points ou des classes de points, de sorte que, comme le dit Whitehead, « les axiomes géométriques sont des propositions touchant les relations entre des points » ; mais, « les points mentionnés dans les axiomes ne sont pas une classe spéciale et déterminée d'entités, ce sont, en réalité, n'importe quelles entités qui se trouvent soutenir des relations mutuelles, telles que les axiomes soient vrais quand ils se réfèrent à ces entités et à ces relations. Par conséquent (la classe des points étant indéterminée), les axiomes ne sont pas du tout des propositions, *ce sont des fonctions professionnelles. Un axiome*, *en ce sens*, *n'étant pas une*

proposition, ne peut être ni vrai ni faux[1]. » Couturat déclare de même : « A tout prendre, un système d'axiomes peut être considéré comme un concept ; c'est même un concept, car c'est une fonction propositionnelle à une variable[2]. »

Sitôt qu'on donne d'un système d'axiomes une certaine interprétation, en faisant correspondre aux symboles non définis des objets singuliers susceptibles d'être représentés, les axiomes deviennent des propositions, vraies ou fausses, selon les cas. Les axiomes d'une théorie déductive apparaissent ainsi, tantôt comme des fonctions propositionnelles, c'est-à-dire comme des expressions indéterminées, dont on ne peut pas dire qu'elles soient vraies ou fausses et dont on se contente de tirer un corps cohérent de conséquences logiques ; tantôt comme des propositions assertoriques, des vérités de fait (d'expérience ou d'intuition), dont toutes les conséquences revêtent le même caractère.

Les principes formateurs et les axiomes de relation, en tant qu'ils sont les seules conditions restrictives imposées à l'interprétation des symboles premiers d'une théorie, sont souvent appelés des *définitions déguisées*, des *définitions implicites*, on encore des *définitions par postulats* des symboles premiers, non définis nominalement. C'est ce qu'a traduit Poincaré, en disant que les axiomes de la géométrie n'étaient que « *définitions déguisées*[3] » ; plus justement, des parties de définition. Par exemple, le postulat d'Euclide n'est pas autre chose qu'un complé-

[1] Whitehead, *Introduction logique à l'étude de la Géométrie*, ap. *R. M. M.*, janvier 1907, p. 34-35.

[2] Couturat, *les Principes des Mathématiques*, ap. *R. M. M.*, janvier 1905, p. 225, note.

[3] *S. H.*, p. 67. — Comp. J. W. Young, *Lectures on fundamental concepts of Algebra and Geometry*, New-York, 1911, p. 53 : « As far as their logical character is concerned, *the unproved propositions play the role of disguised definitions.* »

ment de la définition de la ligne droite. Mais une définition n'est pas une proposition : *elle n'est ni vraie ni fausse.* Elle revient à une convention de langage, issue d'une libre décision de l'esprit, que l'on peut justifier par des raisons d'opportunité, de convenance ou de commodité, mais qui ne s'impose jamais impérativement à notre entendement. Il en résulte que, au point de vue formel. les axiomes sont de simples conventions qui règlent l'usage des termes premiers d'une théorie déductive.

Il faut remarquer, toutefois, que l'affirmation de la compatibilité logique de ces conventions est une proposition véritable, susceptible de vérité ou de fausseté. Pareillement, les postulats d'existence et d'unicité, qui figurent parmi les propositions premières d'une théorie, sont des propositions : ils affirment l'existence et l'unicité de certains objets, susceptibles de vérifier les relations énoncées dans les principes formateurs et les axiomes de relation. Lorsqu'on dit que les principes définissent par postulats les notions premières nominalement indéfinissables, il faut entendre qu'il s'agit uniquement des principes formateurs et des axiomes de relation, à l'exclusion des postulats d'existence et d'unicité, une définition ne comportant jamais l'existence du défini[1].

Ainsi une théorie déductive se présente comme une forme pure, un barème de déductions toutes faites, d'implications formelles indépendantes de tout contenu, susceptible de s'appliquer à des matières fort diverses[2]. C'est ce qui permet d'expliquer, comme nous le verrons dans la suite, qu'il existe un grand nombre d'interpréta-

[1] Comp. L. Rougier, *les Paralogismes du Rationalisme*, 2e partie, chap. v; G. Frege, *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, ap. *Jahresb. d. deut. Math.-Verein*, 1903, p. 371.

[2] Cf. L. Rougier, *De la nécessité d'une réforme dans l'enseignement de la Logique*, ap. *R. M. M.*, septembre-octobre 1917, § 4. p. 583-594.

tions différentes des métriques euclidienne et non-euclidiennes[1].

II. Le système de notions et de propositions premières de David Hilbert.

Les conditions de rigueur logique, auxquelles doit être assujettie toute théorie déductive, ont été mises tardivement en lumière, vers la fin du XIXe siècle, par les Logisticiens italiens. La condition de cohérence a été découverte comme suite des tentatives faites pour montrer la non-contradiction des géométries non-euclidiennes. Les conditions d'indétermination et de suffisance furent d'abord appliquées dans la révision des fondements de l'analyse, lorsque s'inaugura « l'ère de la rigueur de Weierstrass », qui aboutit à l'arithmétisation des mathématiques. La géométrie cartésienne, qui substitue, par l'artifice des coordonnées, l'emploi méthodique d'opérations et de transformations analytiques à la place des constructions géométriques ; les géométries non-euclidiennes, qui montrent l'existence logique de plusieurs métriques différentes ; la géométrie de Grassmann et la géométrie énumérative de Schubert, qui, quoiqu'opérant directement sur les êtres géométriques, remplacent la construction des figures par l'emploi de certains algorithmes, devaient conduire nécessairement à introduire la même rigueur dans l'exposé des principes de la géométrie. C'est à Pasch que revient l'honneur d'avoir requis le premier, en 1882, les deux conditions d'indétermination et de suffisance : « Si la géométrie veut devenir une science déductive, écrit-il, il faut que ses procédés de raisonnement soient indépendants de la *signification des concepts géométriques*, comme ils sont indépendants

[1] *Vide infra*, chap. IV.

des *figures;* seules les *relations* imposées à ces concepts par les postulats et les définitions doivent intervenir dans la déduction. Les conditions à imposer aux concepts premiers et aux postulats sont les suivantes : 1° on énoncera explicitement les concepts primitifs au moyen desquels on se propose de définir logiquement tous les autres ; 2° on énoncera explicitement les propositions fondamentales (postulats), grâce auxquelles on se propose de démontrer logiquement les autres propositions (théorèmes). Ces propositions fondamentales doivent apparaître comme de pures *relations logiques* entre les concepts primitifs, et cela indépendamment de la signification que l'on donne à ces concepts primitifs [1]. »

Appliquant ce critérium de rigueur logique à l'exposé déductif de la géométrie, Pasch découvrit un certain nombre de postulats, appelés par lui *postulats de l'ordre*, que les géomètres antérieurs admettaient implicitement. Avant Pasch, Cantor et Dedekind avait mis en lumière *le postulat de la continuité.* Stolz avait attiré l'attention des géomètres sur *le postulat d'Archimède.* La création de la géométrie projective par Poncelet avait conduit à dénombrer *les axiomes de l'appartenance* des points, des droits et des plans. Enfin, les géométries non-euclidiennes avaient amené Riemann et Helmboltz à analyser les conditions impliquées dans le *postulat de la libre mobilité des figures.* Il résultait de ces recherches que les axiomes habituellement admis dans les traités de géométrie étaient notoirement insuffisants pour fonder déductivement la géométrie. Pasch, le premier, essaya d'en dresser une liste complète, en partant de quatre concepts primitifs : *point*, *être situé entre deux points*, *surface plane* ou *portion finie du plan*, *congruence.* Les postulats admis par Pasch ont été analysés depuis à l'aide de la

[1] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, p. 16.

logistique et reproduits, avec de notables modifications, par G. Peano[1]. MM. Veronese[2], Pieri[3] et David Hilbert[4] sont partis d'autres systèmes de notions et de propositions premières, qui respectent les mêmes conditions de rigueur logique et qui se recommandent par des avantages divers.

Nous nous référerons dans la suite au système de David Hilbert. Ce système a l'avantage de distinguer divers groupes d'axiomes qui se trouvent correspondre à diverses géométries (*Analysis Situs*, géométrie projective, géométrie métrique), et à différents modes d'acquisition psychologique des concepts fondamentaux qui y figurent. Il est rigoureusement conforme aux préceptes de Pasch, c'est-à-dire que les notions premières, traitées comme de simples symboles, y sont caractérisées formellement par un système suffisant et cohérent de postulats, indépendamment de toute représentation sensible constituant une interprétation possible de ces symboles. A cette procédure, Hilbert a donné le nom de *méthode axiomatique*.

Imaginons trois sortes d'objets ordinairement appelés *points*, *droites*, *plans*, que nous conviendrons de désigner respectivement par les symboles A, B, C..., a, b, c..., α, β, γ... : l'ensemble des points A, B, C se nomme l'espace, et les objets a, b, c..., α, β, γ..., sont considérés comme des classes de points. Ces trois sortes d'objets soutiennent entre eux certaines relations qu'on a coutume de désigner par les mots : *situé sur*, *situé entre*, *congruent à*, *parallèle à*. Ces mots, comme ceux de

[1] *Principii di Geometria logicamente esposti*, Torino, 1889; *Sui fondamenti della Geometria*, ap. *Rivista di Matematica*, 1894.

[2] *Fondamenti di Geometria*, Padoue, 1891.

[3] *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo, monografia del ponto et del moto*, ap. *Mem. Accad. della Scienza di Torino*, 1898-1899.

[4] *Grundlagen der Geometrie*, 3 Aufl. Leipzig, 1899.

points, droites, plans, ne doivent éveiller dans notre esprit aucune représentation sensible : seules leurs propriétés formelles sont envisagées. Ainsi, la relation spéciale *être situé sur*, ayant les mêmes propriétés formelles que l'*appartenance logique*, devra être exprimée par le même symbole.

Les notions premières de la géométrie métrique ainsi choisies, il convient d'énoncer les propositions indémontrables qui postulent l'existence des points, des droites et des plans et les caractérisent équivoquement. Aux quatre relations précédentes de position, d'ordre, de parallélisme, de congruence, correspondent quatre groupes de propositions premières appelées respectivement : axiomes d'*appartenance*, d'*ordre*, de *congruence*, de *parallélisme*, auxquels il faut joindre les axiomes de *continuité*[1].

Premier groupe : *Axiomes projectifs d'appartenance.*

1° S'il existe deux points distincts A et B, il existe alors une droite *a* et une seule, à laquelle ces deux points appartiennent.

2° S'il existe trois points distincts, A, B, C n'appartenant pas à la même droite, il existe un plan α et un seul, auquel ces trois points appartiennent.

3° Si deux points distincts A et B d'une droite *a* appartiennent au plan α, la droite *a* appartient à ce plan.

4° Si un point A appartient à la fois aux plans α et β, il existe un autre point B, qui appartient à la fois aux plans α et β.

5° Si une droite *a* est donnée, il existe au moins deux points distincts A et B, qui appartiennent à cette droite ; si un plan α est donné, il existe au moins trois points

[1] Cf. H. Poincaré, *Fondements de la Géométrie*, ap. *Journal des Savants*, mai 1902, p. 251-271 ; Dr Halsted, *Géométrie rationnelle*, trad. Barbarin, Paris, 1911.

A, B, C qui n'appartiennent pas à la même droite *a*, ou non-collinéaires.

6° Il existe au moins deux points appartenant à toute droite ; il existe au moins trois points non-collinéaires appartenant à tout plan ; il existe au moins quatre points qui ne sont pas dans le même plan, ou non-coplanaires.

L'axiome 3 est un axiome de relation ; les axiomes 1, 2, 4, 5 sont des principes formateurs ; l'axiome 6 est un postulat d'existence. L'existence d'un nombre infini de points, de droites et de plans, résulte des axiomes de l'ordre dont nous allons parler.

Les axiomes précédents sont projectifs, c'est-à-dire qu'ils appartiennent à la géométrie projective. Ils sont d'origine visuelle et on peut les considérer comme des conditions de l'association des représentations visuelles qui donnent naissance aux notions abstraites de la droite et du plan. Ils servent à caractériser en partie ces objets. La relation d'appartenance, exprimée souvent par *être situé sur*, est envisagée comme une simple relation logique, sans signification particulière.

Deuxième groupe : *Axiomes topologiques de l'ordre.*

1° Si A, B, C sont trois points distincts appartenant à une même droite, et si B est entre A et C, B est aussi entre C et A et n'est ni C ni A.

2° Si A et C sont deux points appartenant à une droite, il existe au moins un point B, appartenant à la même droite, situé entre A et C, et au moins un point D, tel que C soit entre A et D.

3° Si trois points appartiennent à une même droite, il existe toujours un et un seul point situé entre les deux autres.

Appelons *segment* l'ensemble de deux points A et B appartenant à une droite *a*, et désignons le par A B.

4° Si trois segments AB, BC, CA et une droite *a*

appartiennent à un même plan, si un point de l'un d'entre eux appartient à la droite *a*, il existe un autre point de la droite qui appartiendra à l'un des deux autres segments.

Les axiomes 2, 3, 4 sont des principes formateurs ; l'axiome 1 est un axiome de relation. La relation *situé entre* n'a aucun sens particulier, elle est seulement caractérisée par ses propriétés formelles : la symétrie et la transivité.

Les axiomes de l'ordre ne caractérisent pas les notions de droite et de plan. Remplaçons ces notions par celles de ligne et de surface ; les axiomes sont encore vrais : ils s'appliquent aussi bien à une courbe quelconque qu'à la droite, à une surface continue quelconque qu'au plan. Si l'on substitue alors aux notions de droite et de plan celles de ligne et de surface, on obtient les axiomes de l'*Analysis Situs* ou Topologie, qui est une géométrie purement qualitative, indépendante de la géométrie projective et de la géométrie métrique, antérieure logiquement à elles et qui en constitue le substratum commun. Cette discipline étudie les relations de connexité (ordre et continuité) existant entre les points de variétés continues à une ou plusieurs dimensions. Ces axiomes systématisent le résultat d'expériences faites à l'aide de sensations tactilo-musculaires.

Troisième groupe. — *Axiomes métriques de congruence.*

Ces axiomes se subdivisent en trois sous-groupes : le premier se rapporte aux segments ; le second aux angles, nominalement définissables comme des systèmes formés par deux demi-droites ayant un point commun ; le troisième aux triangles, nominalement définissables comme des systèmes de trois points non-collinéaires. Parmi ces axiomes figure un des trois cas de l'égalité des triangles, dont on donnait une pseudo-démonstration par superpo-

sition, et que l'on doit poser à titre de postulat, dans le système de David Hilbert, si l'on veut éviter de faire appel à l'intuition.

Quatrième groupe : *Axiome métrique des parallèles (postulat d'Euclide).*

Par un point donné, il n'existe qu'une seule parallèle à une droite donnée.

On dit qu'une droite est parallèle à une autre si, étant située dans le même plan, elle n'a avec elle aucun point commun.

Les géométries métriques non-euclidiennes rejettent ce postulat.

Cinquième groupe : *Axiomes topologiques de continuité.*

Le cinquième groupe comprend le postulat d'Archimède. L'importance de ce postulat consiste en ce qu'il permet de représenter chaque segment par un nombre rationnel ou irrationnel qui le mesure. On ne saurait toutefois conclure de là qu'à tout nombre irrationnel correspond un segment mesuré par ce nombre. Il faut, pour qu'à tout nombre réel corresponde un segment dont il soit la mesure, énoncer un axiome complémentaire, qui a reçu le nom de postulat de Cantor ou celui de postulat de Dedekind, suivant les énoncés différents qu'il a reçus de ces deux auteurs.

Hilbert joint à l'axiome d'Archimède un autre axiome *(Vollstandigkeits-Axiom)*, qui affirme que le système formé par les axiomes précédents est clos et que l'édifice dont il est la base est la géométrie ordinaire.

Les deux postulats d'Archimède et de Dedekind appartiennent à l'*Analysis Situs :* ils s'appliquent au continu linéaire, aussi bien à une courbe qu'à une droite. Ils permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les segments d'une ligne et l'ensemble des nombres réels.

C'est sur cette correspondance que repose la possibilité de la géométrie analytique de Descartes. Chaque fois que l'on considère l'espace comme une *multiplicité numérique*, c'est-à-dire chaque fois que l'on exprime un point par un couple de valeurs qui mesurent ses distances à deux axes de coordonnées, on postule les axiomes de continuité. Si l'on s'affranchit du postulat d'Archimède, il faut renoncer à cette affirmation : *l'espace est une variété numérique.*

III. Les postulats d'Euclide.

Les conditions requises par Pasch, pour donner à la géométrie le caractère d'une science déductive, étaient ignorées des Anciens. Les Pythagoriciens s'étaient bien efforcés de substituer à la géométrie empirique des Egyptiens une géométrie rationnelle, fondée sur la définition génétique des figures, en partant d'un petit nombre de notions irréductibles, telles que le point, la droite, la distance, le mouvement, etc. Platon, dans le VI[e] livre de la *République*, opposant le raisonnement discursif du mathématicien à l'intuition intellectuelle du dialecticien, avait bien parlé des sciences mathématiques comme de systèmes hypothético-déductifs, fondés sur un certain nombre de principes admis pour vrais sans démonstration. Il n'apparaît cependant pas qu'au temps d'Euclide on se soit aperçu que le point de départ de toute science déductive consiste dans le choix d'un système de notions et de propositions premières, suffisant et cohérent, explicitement formulé. Si l'on ouvre les *Eléments*, tels qu'ils nous ont été transmis fortement glosés par Théon d'Alexandrie, on voit qu'Euclide fait reposer la géométrie sur trois sortes de propositions [1] :

[1] Euclidis, *Opera omnia*, éd. Heiberg, 1883, t. I.

1° Les *définitions* ὅροι, du point, de la ligne, de la droite, de la surface, etc.

2° Les *postulats*, αἰτήματα, qui énoncent la possibilité d'effectuer certaines constructions premières auxquelles se ramènent toutes les autres, et qui correspondent à ce que nous avons appelé les principes formateurs.

3° Les *axiomes*, κοιναί ἔννοιαι, qui s'appliquent à toutes les sciences mathématiques.

Les définitions d'Euclide sont de simples descriptions, empruntées à la technique de l'art de bâtir, qui n'interviennent pas dans le cours des raisonnements : le point est ce qui n'a pas de parties, la ligne est une longueur sans largeur, la ligne droite est la ligne qui repose *ex æquo* sur tous ses points. Nulle part Euclide ne se soucie d'énoncer explicitement les notions premières à partir desquelles il se propose de définir toutes les autres. Si l'on considère les définitions nominales qu'il donne du point, de la ligne, de la droite, du plan, etc., les notions premières qu'il utilise sont celles de *partie*, *longueur*, *largeur*, *reposer également sur ;* mais il est plus probable qu'il envisageait comme premières les notions de *point*, de *droite* et de *plan*.

Les postulats d'Euclide, traduits en langage moderne, sont les suivants :

1° Si deux points distincts sont donnés, il existe une droite à laquelle appartiennent ces deux points.

2° Si un segment rectiligne est donné, il existe une droite infinie à laquelle appartient ce segment.

3° Si un point est donné, il existe un cercle de rayon quelconque, dont il est le centre.

4° Les angles droits sont congruents.

5° Si deux droites rencontrent une autre droite, et si elles font d'un même côté avec elle des angles intérieurs dont la somme est inférieure à deux droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent

du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits.

Si l'on rapproche ce postulat, appelé *postulatum d'Euclide*, du postulat 2 sur l'infinité de la droite et de la 33e définition des *Eléments :* « Deux droites coplanaires sont dites parallèles lorsque, si loin qu'on les prolonge, elles ne se rencontrent pas », il équivaut alors à cet autre appelé *postulat des parallèles*, qui comprend à la fois un principe formateur et un postulat d'unicité : « Etant donnés une droite *a* et un point pris hors de cette droite, il existe une parallèle à la droite *a*, et une seule, passant par ce point. »

6° Deux points déterminent une seule droite.

Comme on le voit, les trois premiers *principes propres* d'Euclide postulent : 1° l'existence d'une droite, si deux points sont donnés ; 2° l'existence d'une droite infinie, si un segment de droite est donné ; 3° l'existence d'un cercle de rayon quelconque, si un point est donné. Il est évident qu'en bonne logique Euclide aurait dû commencer par demander l'existence de deux points ; puis, si deux points sont donnés, l'existence d'un segment rectiligne ; puis, si un segment rectiligne est donné, l'existence d'une droite infinie. Le postulat 4 est un postulat d'unicité, auquel Euclide donne l'énoncé intuitif suivant : « Deux droites ne peuvent enclore un espace. »

Les postulats 2 et 3 justifient l'usage de la règle et du compas. C'est avec eux qu'Euclide résout tous les problèmes de construction, qui jouent, chez les Anciens, le rôle de théorèmes d'existence, comme l'a montré Zeuthen.

A la suite de ces postulats, Euclide énonce des *principes communs* qui apparaissent comme des propositions de Logistique, excepté le dernier, qui est un postulat géométrique :

1° Des choses, égales à une même chose, sont égales

entre elles. — C'est le principe logique de la transitivité de l'égalité.

2° Si, à des choses égales, on ajoute des choses égales, les sommes sont égales. — Cette proposition correspond à un théorème de logistique :

$$a = b . \supset . ac = bc.$$

3° Si, de choses égales, on retranche des choses égales, les restes sont égaux. — C'est encore un théorème de logistique qui est la réciproque du précédent.

4° Le tout est plus grand que la partie. — C'est la définition des ensembles finis ; l'axiome est faux dès qu'il s'agit d'ensembles infinis ou transfinis, pour lesquels le tout égale la partie.

5° Les choses qui coïncident sont égales. — C'est un postulat géométrique qui devrait correctement s'exprimer ainsi : la congruence entre deux figures est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Il est évident que ce système de principes logiques et de principes géométriques n'est pas suffisant pour qu'on puisse en déduire tous les théorèmes de la géométrie métrique. Euclide invoque d'autres règles logiques que celles qu'il a posées, il fait subrepticement appel à d'autres *principes propres* que ceux qu'il a explicités.

Quels sont les postulats qu'Euclide a systématiquement négligés ? Ce sont ceux de l'ordre, qui appartiennent à l'*Analysis Situs*, dont toutes les propositions sont intuitives, et ceux de la congruence, qui correspondent à des expériences journalières sur le mouvement des corps solides : ce sont, en un mot, ceux qui sont si intuitifs, si naturellement évidents, que l'idée ne lui est pas venue de les énoncer explicitement. Faute de quoi, il n'est presque aucune démonstration des *Eléments* qui soit logiquement rigoureuse ; où ne se mêlent, à des déductions purement formelles, des constatations, faites à la simple inspection

de la figure, qui dissimulent des postulats implicites et substituent, à la nécessité apodictique du raisonnement, l'évidence assertorique de l'intuition spatiale. C'est faute d'avoir énoncé un nombre suffisant de postulats qu'Euclide est obligé de recourir à des opérations physiques, telles que le transport, le retournement, la rotation des figures. Cette pseudo-rigueur des démonstrations euclidiennes a fourvoyé bon nombre d'excellents logiciens, qui, faisant l'analyse des démonstrations d'Euclide, ont cru faire celle d'un modèle achevé de théorie déductive [1].

Tels qu'il les a énoncés, les postulats d'Euclide suffisent à caractériser la droite euclidienne. La définition nominale qu'il en donne n'a aucune valeur, puisqu'elle s'applique aux géodésiques de n'importe quelle surface ; mais on peut dire que la droite euclidienne est la ligne qui satisfait aux postulats 1, 2, 5 et 6. Nous verrons que la droite lobatschefskienne ne respecte pas le postulat 5 et que la droite riemannienne ne respecte pas les postulats 2 et 6.

[1] Cf. L. Rougier, *la Démonstration géométrique et le Raisonnement déductif*, ap. *R. M. M.*, p. 851-854.

CHAPITRE II

LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

I. Les tentatives de démonstration du Postulat d'Euclide.

Les géométries non-euclidiennes dérivent de l'échec des tentatives de démonstration du 5e postulat d'Euclide. Ce postulat, dont l'énoncé est assez compliqué, n'intervient qu'à propos du 29e théorème des *Éléments*, alors que l'on a déjà fait appel à tous les autres postulats ou axiomes. Ce défaut d'eurythmie dans une œuvre si harmonieuse, cette solution de continuité dans une science dite déductive, apparurent comme une tare cachée dont il fallait à tout prix se défaire : « La définition et les propriétés de la ligne droite et des parallèles », écrivait d'Alembert, exprimant l'opinion générale des géomètres depuis Proclus, « sont l'écueil et, pour ainsi dire, les candale des Éléments de la géométrie [1] ». Aussi les tentatives de démonstration du postulatum commencèrent, dès l'Antiquité, avec les commentateurs grecs des Ecoles d'Alexandrie et d'Athènes. Proclus rapporte des essais de démonstration attribués à Ptolémée, Posidonius, Geminus et en ajoute un qui n'est pas plus heureux. Les mêmes tentatives se font jour chez les géomètres arabes, Al-Narizi et Nazir Ed Edin ; chez les savants de la

[1] *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie*, Paris, 1759, t. V, p. 202.

Renaissance, Commandin, Clavius, Giordano Vitale ; au XVIIe siècle, chez Wallis et Giordano ; au XVIIIe siècle, chez Gerolamo Saccheri et J.-H. Lambert. Enfin, les grands géomètres français de la fin du XVIIIe siècle, entre autres d'Alembert, Laplace, Carnot, Fourier, Lagrange, et, un peu plus tard, Legendre, s'occupèrent de la théorie des parallèles [1]. Il semble que ce soit Gauss qui ait compris le premier l'impossibilité de démontrer le postulatum en partant des autres propositions premières d'Euclide [2].

Les tentatives de démonstration du postulat sont de deux sortes : directes ou indirectes. Dans le premier cas, elles consistent à déduire le postulat des autres propositions antérieurement admises ou démontrées par Euclide, en faisant implicitement appel à un nouveau postulat, qui est l'équivalent du premier [3]. Dans le second cas, elles consistent à rejeter le postulat, en admettant les autres propositions premières d'Euclide, dans l'espoir d'arriver à un résultat contradictoire. Elle eurent pour effet immédiat d'amener la découverte de postulats équivalents à celui d'Euclide et la démonstration de divers théorèmes non-euclidiens.

Les postulats équivalents à celui d'Euclide dépendent de ce que l'on admet ou non l'infinité de la droite (postulat 2 des *Eléments*).

Dans le premier cas, on peut substituer au postulatum les propositions suivantes :

1° Il existe une seule parallèle, menée par un point à une droite donnée.

2° Il existe deux droites coplanaires, qui n'ont pas de point commun et sont équidistantes.

3° Il existe des triangles semblables non congruents.

[1] Cf. F. Engel und Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien, von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig, 1895 ; Bolona, *la Geometria non-euclidea*, Bologne, 1906.

[2] En tout cas, avant 1816 : *Werke*, Göttingue, 1900, t. VIII, p. 175, 182.

[3] Cf. *les Paralogismes du Rationalisme*, chap. VIII.

4° La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux droits.

5° Il existe des triangles rectilignes ayant une aire aussi grande que l'on veut.

L'équivalence du premier postulat était connue d'Euclide ; Proclus et Giordano ont découvert celle du second ; Wallis, Carnot, Laplace, celle du troisième ; Saccheri, Legendre, Gauss, celle du quatrième ; Lambert et Gauss, celle du cinquième. Si l'on admet que les droites peuvent être finies, l'équivalence des propositions précédentes avec le postulatum cesse d'exister. C'est ainsi que la droite riemannienne vérifie le 5e postulat d'Euclide et non celui de l'unicité de la parallèle. Dans la suite, par postulat d'Euclide ou postulatum, nous entendrons *celui de la parallèle* ; quand nous aurons en vue l'énoncé particulier que lui a donné Euclide, nous le spécifierons chaque fois.

Saccheri fut le premier à tenter une démonstration du postulatum par l'absurde [1].

Il considère un quadrilatère ayant trois angles droits et distingue trois hypothèses possibles concernant le quatrième angle : il peut être droit, aigu ou obtus. Il démontre que chacun de ces cas est vérifié pour tous les quadrilatères, dès qu'il l'est pour un seul. Il établit alors, pour chacun des trois cas, les propriétés que possèdent deux droites d'un plan perpendiculaires à une même troisième : dans le premier cas, elles seront équidistantes (d'où suit le postulat des parallèles) : dans le second cas, elles commenceront à se rapprocher à partir de la perpendiculaire commune ; dans le troisième cas, elles divergeront. Il élimine l'hypothèse de l'angle obtus comme contredisant l'infinité de la droite, et il croit trouver un élément « discordant » dans le caractère asymptotique des paral-

[1] *Euclides ab omni nævo vindicatus : sive conatus geometricus quo stabiliantur prima ipsa universæ geometriæ principia*, Milan, 1733.

lèles auquel on aboutit avec l'hypothèse de l'angle aigu.

J.-H. Lambert[1] reprend la considération des trois cas envisagés par Saccheri et montre que, dans les deux derniers, il existe une sorte *d'unité de mesure naturelle ou absolue*, c'est-à-dire une unité définie par ses relations avec le plan, tandis que, dans la géométrie d'Euclide, il n'y a rien de semblable. Il établit que, dans le cas de l'angle obtus, où l'on rejette l'infinité des droites, la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits ; qu'elle est inférieure dans le cas de l'angle aigu, et que, dans ces deux cas, si l'on nomme S l'aire d'un triangle, E l'excès ou le déficit angulaire sur deux droits, K un coëfficient constant appelé par Gauss *constante spatiale*, on a S = K E. Lambert remarque encore que l'hypothèse de l'angle obtus est réalisée sur la sphère, si l'on prend pour droites les grands cercles, et que l'hypothèse de l'angle aigu se vérifierait sur une sphère de rayon imaginaire. Reprenant cette dernière idée, Taurinus construit un système analytiquement adéquat à cette hypothèse, système qu'il nomme *géométrie logarithmo-sphérique*, en substituant, dans les formules de la trigonométrie sphérique, un rayon imaginaire au rayon réel de la sphère. Bien qu'un tel système soit affranchi de toute contradiction, Lambert rejette l'hypothèse de l'angle aigu, par suite d'une fausse interprétation des constantes contenues dans ses formules, qu'il considère comme impliquant un espace susceptible d'une infinité de déterminations.

Les théorèmes les plus importants de géométrie non-euclidienne, découverts avant la première publication de Lobatchefski, sont les suivants :

1° *Théorème de Saccheri* (1667-1733). Dans l'hypothèse où la somme des angles d'un triangle est inférieure à

[1] *Theorie der Parallellinien*, ap. *Magaz. f. d. reine u. angew. Math*, Leipzig, 1786, p. 137-164.

deux droits, deux droites se rencontrent, ou sont asymptotes ou ont une perpendiculaire commune, à partir de laquelle elles divergent (1733).

2° *Théorème de Lambert* (1728-1777). Dans la même hypothèse, l'aire d'un triangle est proportionnelle à son déficit angulaire (1766 ; publié en 1786).

3° *Théorème de Taurinus* (1794-1874). Cette même hypothèse répond à la relation suivante :

$$\mathrm{Ch}\,\frac{a}{\mathrm{R}} = \mathrm{Ch}\,\frac{b}{\mathrm{R}}\,\mathrm{Ch}\,\frac{c}{\mathrm{R}} - \mathrm{Sh}\,\frac{b}{\mathrm{R}}\,\mathrm{Sh}\,\frac{c}{\mathrm{R}}\cos \mathrm{A}.$$

entre les côtés a, b, c et un angle A d'un triangle (1826). Cette formule est trouvée par induction, en supposant imaginaires les côtés d'un triangle sphérique.

4° *Théorème de Legendre* (1752-1833). La somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits, quand on admet l'infinité des droites (1899). Elle est égale ou inférieure à deux droits dans tous les triangles, si elle l'est dans un seul (1033).

II. La géométrie non-euclidienne de Lobatchefski.

Au début du XIXe siècle, les temps étaient mûrs pour l'avènement de la géométrie non-euclidienne. Comme c'est le cas général dans l'histoire des sciences, plusieurs chercheurs la découvrirent, indépendamment les uns des autres, à peu près vers la même époque. Le premier en date est sans doute Schweikart. Ce dernier, étant à Charkow vers 1812, exprima à Bessel sa conviction qu'une géométrie affranchie du postulatum était possible, dont il fit, en 1818, un exposé écrit, envoyé à Garling, pour être communiqué à Gauss[1]. Gauss, dès 1811, avait recherché une démonstration du postulat des parallèles, mais il

[1] Cf. Engel und Stäckel, *Op. laud.*, p. 243.

n'avait pas tardé à en comprendre l'impossibilité. Soit par suite de ses multiples occupations, soit par crainte des « clameurs des béotiens », il différa l'instant de la publication de ses recherches, jusqu'au jour où, ayant reçu du père du jeune Bolyaï le travail de son fils, il jugea cette publication devenue inutile et se contenta de donner plein assentiment à l'œuvre du jeune homme. Il répondit simplement à son père : « Je ne puis louer le travail de ton fils, car le louer serait me louer moi-même[1]. » Quelques années après, il tint le même langage à Schumacher[2], en parlant des ouvrages de Lobatchefski.

Ce qui nous reste des recherches de Gauss est contenu dans quelques lettres, adressées surtout à Schumacher[3]. Celui-ci avait fait part à Gauss de plusieurs tentatives personnelles de démonstration du postulatum. Gauss lui répond en relevant ses pétitions de principes : Schumacher admet la similitude des figures non congruentes, la possibilité pour l'aire d'un triangle de croître indéfiniment, toutes propositions équivalentes au postulat à démontrer et qui cessent d'être vraies dans l'hypothèse non-euclidienne. Ce qui caractérise celle-là, c'est une certaine *constante spatiale*, que Gauss introduit comme il suit. Dans la géométrie non-euclidienne, la demi-circonférence d'un cercle de rayon r a pour valeur :

$$\frac{1}{2}\pi K\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right),$$

K étant une constante, positive dans l'hypothèse de l'angle obtus, négative dans l'hypothèse de l'angle aigu, et qui croît au-delà de toute grandeur dans l'hypothèse de l'angle droit.

[1] *Lettre à Bolyaï du 6 mars 1832.*

[2] *Lettre à Schumacher du 28 novembre 1846.*

[3] Cf. Halsted, *Gauss and the non-euclidean geometry*, ap. *Science*, 1900, p. 842-846.

Dans le temps où Gauss commençait à réfléchir sur la théorie des parallèles, Lobatchefski, nommé professeur à Kasan en 1815, faisait cette année même une série de conférences sur les fondements de la géométrie. Il cherchait, lui aussi, à démontrer le postulatum par réduction à l'absurde. Il s'aperçut que, si loin qu'il poussât les conséquences entraînées par son rejet, il ne parvenait à aucune contradiction. C'était bel et bien en face d'une nouvelle géométrie qu'il se trouvait, fort différente de celle d'Euclide, mais aussi rigoureuse. Il l'exposa dans une série de mémoires publiés à partir de 1829[1].

Examinons les particularités de la nouvelle géométrie. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener, dans un même plan, trois sortes de droites ; 1° des sécantes ; 2° des droites non-sécantes comprises dans un certain angle, appelé angle de parallélisme ; 3° deux parallèles qui limitent les droites non-sécantes et se distinguent d'elles en ce qu'elles deviennent sécantes pour toute augmentation, si petite soit-elle, de leur inclinaison sur la droite donnée. Le postulat d'Euclide est alors remplacé par le suivant : « Par un point pris hors d'une droite, on peut mener dans le même plan deux parallèles et une infinité de droites non-sécantes, comprises entre elles. » Etant donnée une droite x, les parallèles que l'on peut mener par un point O à cette droite et qui forment les côtés de l'angle de parallélisme, se rapprochent de plus en plus de x, si on les suit dans le sens où elles forment un angle aigu avec la perpendiculaire abaissée de O sur x en P, de sorte que leur distance à la droite de x, à mesure qu'on s'éloigne de O, tend vers zéro. C'est pour cela que Bolyaï les appelle des *droites asymptotes*.

L'angle de parallélisme varie avec la longueur de la

[1] N. I. Lobatchefski, *Opera geometrica* (français, allemand et russe), Kasan, 1883-1886; — Cf. F. Engel, *Nicolaj Iwanovitsch Lobatchefskij : Zwei geometriche Abhandlungen*, Leipzig, 1898.

perpendiculaire abaissée de O sur x en P. Si l'on désigne par u l'angle complémentaire formé par une parallèle et la perpendiculaire OP, et par a la distance OP, on obtient la relation :

$$e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}} = 2 \cot u,$$

dans laquelle K *est un paramètre à déterminer par l'expérience :* c'est la *constante spatiale* de Gauss. Ce paramètre intervient dans les relations qui lient les diverses parties d'une figure. On le détermine une fois pour toutes ; mais, comme on peut lui donner une valeur quelconque, *il y a une infinité de géométries métriques lobatchefskiennes.*

Lorsque $K = \infty$, l'angle de parallélisme est nul et les deux perpendiculaires se confondent. On retombe dans le cas du postulat d'Euclide et de la géométrie ordinaire. *On peut donc considérer la géométrie euclidienne comme le cas limite des géométries non-euclidiennes.* C'est pour cela que Lobatchefski nomme la géométrie qu'il a découverte *Pangéométrie.*

Lobatchefski démontre encore un certain nombre de propositions remarquables :

Le parallélisme de deux droites est réciproque et transitif. Une droite conserve son caractère de parallélisme en tous ses points.

Le lieu des points d'un plan équidistants à une droite fixe, est une courbe, comme l'avait déjà vu Saccheri. Les courbes ainsi obtenues sont dénommées par Bolyaï *courbes parallèles à une droite.*

La somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits et la différence est proportionnelle à l'aire du triangle. Il résulte de là que celle-ci est toujours inférieure à une limite déterminée, si grands que soient les côtés. C'est ce que Gauss avait démontré à Schumacher.

La somme des angles d'un polygone de *n* côtés est inférieure à $(2n - 4)$ angles droits, la différence étant proportionnelle à l'aire du polygone. *Il n'existe pas de rectangles :* si un quadrilatère a trois angles droits, le quatrième est aigu.

Il n'existe pas de figures semblables non congruentes. Admettre l'existence de triangles semblables non congruents, c'est admettre le postulat d'Euclide, ainsi que le faisait remarquer Gauss à Schumacher.

La trigonométrie du plan lobatchefskien diffère profondément de la trigonométrie plane euclidienne. Cependant ses formules peuvent s'obtenir, comme l'avait découvert Lambert, en prenant les formules de la géométrie sphérique ordinaire, et en attribuant au rayon une valeur imaginaire $K\sqrt{-1}$; de là, le nom de *géométrie imaginaire* proposé tout d'abord par Lobatchefski. On peut éviter l'emploi des imaginaires, en substituant aux fonctions trigonométriques ordinaires les fonctions trigonométriques hyperboliques correspondantes. On suppose les longueurs rapportées au paramètre K, au lieu de les rapporter au rayon de la sphère pris comme unité, ainsi qu'on le fait généralement dans la trigonométrie sphérique. C'est pourquoi F. Klein a proposé de remplacer l'appellation de géométrie imaginaire par celle de *géométrie hyperbolique*. Enfin, la trigonométrie de la géométrie hyperbolique se réduit à la trigonométrie de la géométrie euclidienne, lorsque les côtés du triangle sont infiniment petits.

La géométrie de la sphère diffère notablement selon que l'on considère des sphères de rayon fini ou infini. Le cercle, dont le centre s'éloigne à l'infini sur une perpendiculaire à une droite tangente, n'a pas, comme dans la géométrie d'Euclide, cette tangente pour limite, mais une courbe distincte, l'*horicycle*. Une surface sphérique, dont le centre s'éloigne à l'infini sur la perpendiculaire à un plan tangent, n'a pas pour limite ce plan, mais une

surface de révolution, l'*horisphère*, ayant pour méridienne l'horicycle. Horicycles et horisphères jouissent de cette commune propriété : les médiatrices de leurs cordes sont parallèles entre elles.

La considération des horicycles et des horisphères permet de fournir une interprétation non-euclidienne de la métrique euclidienne. En effet, Lobatchefski a démontré ce théorème : *La géométrie des horicycles sur les horisphères est euclidienne*, ce qui veut dire que les horicycles peuvent être traités comme des droites euclidiennes et que la planimétrie de l'horisphère est alors identique à celle du plan euclidien. Appelons plan principal, tout plan mené par un axe de l'horisphère ; tout plan principal coupe l'horisphère suivant un horicycle. Considérons trois plans principaux qui se coupent deux à deux. Ils forment entre eux des angles dont la somme est égale à deux droits. On peut considérer ces angles comme les angles du triangle de l'horisphère qui aurait pour côtés les arcs d'horicycles formés par l'intersection des trois plans principaux avec l'horisphère. On voit ainsi que les triangles de l'horisphère ont, entre leurs angles et leurs côtés, les mêmes relations métriques que les triangles rectilignes du plan euclidien.

Le théorème de Lobatchefski devait être généralisé dans la suite, après que Beltrami eût établi que la planimétrie des pseudo-sphères euclidiennes est lobatchefskienne et que celle de la sphère est riemannienne. Barbarin a démontré un théorème général qui devait dissiper bien des erreurs d'interprétation : *Chacune des trois métriques, euclidienne, lobatchefskienne, riemannienne, renferme des surfaces à courbure constante, dont les lignes géodésiques ont les propriétés métriques des droites des deux autres métriques*[1]. En vertu de ce théorème, on peut

[1] Barbarin, *Etudes de Géométrie analytique non-euclidienne*, ap. *Mém. couronnés Mém. Acad. Belg.*, t. LX, 1900.

interpréter géométriquement chacune de ces trois planimétries dans les deux autres.

On peut résumer ainsi les propositions principales de la géométrie de Lobatchefski : La somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque est inférieure à deux droits ; deux parallèles se rapprochent continuellement ; tous les points équidistants d'une droite sont sur une courbe, appelée équidistante ou horicycle, qui est la limite d'une circonférence dont le rayon augmente indéfiniment ; si, dans un quadrilatère, trois angles sont droits, le quatrième est aigu et il ne saurait y avoir de rectangles ; deux perpendiculaires à une droite ne sont pas équidistantes, mais s'écartent l'une de l'autre à mesure qu'on les prolonge ; à l'inverse de la géométrie euclidienne où trois points sont toujours sur une ligne droite ou sur un cercle, il existe, en géométrie non-euclidienne, des triplets de points, par exemple trois points équidistants d'une droite et d'un même côté, qui ne sont ni collinéaires, ni concycliques ; il n'existe pas de figures semblables non congruentes ; il existe quatre lignes et quatre surfaces uniformes, c'est-à-dire telles qu'un élément de ces lignes ou de ces surfaces peut se déplacer sans déformation sur la ligne ou sur la surface où on l'a pris : d'une part, ce sont *la droite*, *le cercle*, *l'horicycle* et les *courbes parallèles à une droite ;* d'autre part, ce sont *le plan*, *la sphère*, *l'horisphère* et *les surfaces de révolution* engendrées par la rotation des *courbes parallèles à une droite.*

III. L' « Habilitationschrift » et la géométrie de Riemann.

La géométrie de Lobatchefski correspond à l'hypothèse de l'angle aigu de Saccheri ; il convenait de voir ce qu'il adviendrait en développant l'hypothèse de l'angle obtus. Lambert avait déclaré que cette hypothèse se vérifie dans la géométrie sphérique ordinaire ; mais c'est à Rie-

mann que revient l'honneur d'avoir donné son nom à la seconde métrique non-euclidienne. Sa découverte est exposée dans une thèse d'agrégation, présentée à la Faculté de Philosophie de Gottingen en 1854, sous les auspices de Gauss[1].

Dans sa thèse, Riemann est guidé par des préoccupations épistémologiques : le lien de la nécessité qui lie les axiomes de la géométrie au « concept d'espace » lui échappe. Ne contiennent-ils rien de superflu ou d'insuffisant? Le meilleur moyen, pour s'en rendre compte, consiste à partir de la notion la plus générale de la grandeur (dont l'espace n'est qu'une variété), puis à la particulariser par l'adjonction de postulats, jusqu'à ce que l'on arrive à une définition de l'espace, c'est-à-dire à l'énoncé des propriétés métriques qui le caractérisent. C'est donc à une classification des grandeurs que Riemann procède et à la détermination de la place occupée dans cette classification par l'espace; c'est, en même temps, à un dénombrement des postulats de la géométrie qu'il aboutit.

Riemann part de la notion générale d'une « quantité multiplement étendue, susceptible de déterminations diverses ». Après un certain nombre de spécifications, il en vient à définir le genre des « multiplicités continues à *n* dimensions mesurables avec une commune unité ». Ce genre comprend une infinité d'espèces, dont chacune est caractérisée par la fonction qui lie aux coordonnées d'un point la distance de ce point à l'origine. A chacune de ces espèces correspond une sorte d'espace, et à ces espaces correspondent une infinité de géométries différentes ; ce sont *les géométries des espaces à courbure variable.*

Pour obtenir une classification rationnelle de ces géo-

[1] *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationschrift, Göttingue, 1851; *Abh. Ges. Gött.*, 1866-1867; *Werke*, 1876, p. 254-269.

métries, il convient de classer leurs fonctions caractéristiques d'après la forme de leurs différentielles, c'est-à-dire d'après la forme de la relation analytique qui lie l'élément infiniment petit de la distance *ds* aux coordonnées et à leurs éléments infiniment petits.

Riemann se borne à envisager le cas où *ds* peut être exprimé par la racine carrée d'une fonction quadratique des distances des coordonnées, c'est-à-dire :

$$ds^2 = \sum_{(i,k)} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (ik = 1, 2, \ldots, n).$$

Riemann pose cette formule à titre d'hypothèse, à cause de sa très grande simplicité. Helmholtz la justifie dans la suite, en montrant que, si l'on admet le libre déplacement des figures dans l'espace, il n'y a plus d'autre forme possible que celle-là.

En partant de l'élément de distance *ds*, représenté par une forme quadratique, Riemann définit une notion capitale, *la mesure de la courbure de l'espace en un point.* Gauss avait montré que la courbure d'une surface, dans un espace à trois dimensions, est une propriété intrinsèque de cette surface, absolument indépendante de la troisième dimension. Partant de l'expression analytique donnée par Gauss de la courbure K pour une surface de l'espace ordinaire, Riemann la généralise en l'appliquant au cas d'une multiplicité à un nombre quelconque n de dimensions dans un espace à $n + 1$ dimensions. La courbure de l'espace ainsi définie est, en général, variable en un point avec la direction de l'élément de surface envisagé, et d'un point de l'espace à un autre. Si elle est constante en un point pour tous les éléments de surface envisagés et en tous les points de l'espace, on a ce que Riemann appelle *une multiplicité à courbure constante.* Ce qui caractérise une telle multiplicité, c'est que le mouvement sans déformation des figures y est possible. Si K est la

mesure de courbure de l'espace, la formule qui donne la longueur de l'élément de distance *ds* devient :

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, ds^2}{\left(1 + \frac{k}{4}\,\Sigma x^2\right)^2}.$$

Ce dernier genre, constitué par *la géométrie métrique différentielle des multiplicités à courbure constante*, n'est susceptible de se subdiviser qu'en trois espèces, qui correspondent à trois géométries métriques possibles, suivant que le paramètre K, qui figure dans l'expression de l'élément linéaire, est nul, négatif ou positif. On a, en effet, pour :

1° $K = 0$, la géométrie ordinaire ;
2° $K < 1$, la géométrie de Lobatchefski ;
3° $K > 1$, la géométrie dite de Riemann.

Les propriétés les plus importantes de cette dernière sont les suivantes : Toutes les droites se rencontrent, si bien que le postulat 5 des *Eléments* d'Euclide est vrai ; mais le postulat des parallèles est faux : par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener aucune parallèle à cette droite. Toute droite a une longueur finie, si bien que le postulat 2 d'Euclide doit être rejeté. Deux droites quelconques enferment un espace, contrairement au postulat 6 d'Euclide. Enfin, la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits.

Cette géométrie si paradoxale, qui rejette deux des postulats d'Euclide, trouve une interprétation toute naturelle sur la sphère euclidienne, lorsqu'on ne tient compte que des propriétés intrinsèques des éléments de cette surface. C'est ce que devait établir Beltrami.

IV. Les interprétations de Beltrami.

Les métriques non-euclidiennes avaient à peine vu le jour, qu'elles eurent à conquérir leur droit à l'existence, en résistant aux nombreuses attaques dont elles furent l'objet.

D'abord, le fait même de leur existence n'était pas une preuve de leur survie. Lobatchefski, Bolyaï, Riemann n'avaient pas découvert de contradiction dans la série de déductions qu'ils avaient tirées de leurs postulats : qui sait si, en poussant plus avant ces déductions, ils n'eussent pas fini par en rencontrer une. La preuve de l'indépendance du postulatum vis-à-vis des autres propositions premières d'Euclide n'était pas encore péremptoirement administrée. De plus, argumentaient les philosophes criticistes : admettons un peu l'existence logique des nouvelles géométries ; ce sont des fantaisies analytiques de l'entendement des mathématiciens, incapables de s'accompagner d'intuition, la géométrie euclidienne s'imposant seule comme forme *a priori* de notre sensibilité. Etablir la cohérence logique des métriques nouvelles, prouver l'indépendance du postulat des parallèles, trouver des interprétations intuitives de ce que l'on considérait comme des formes purement abstraites, fut le souci prédominant des Métagéomètres. C'est dans l'œuvre de Beltrami que l'on retrouve le mieux l'écho de ces préoccupations d'une fois.

Beltrami[1] eut l'idée d'interpréter les planimétries non-euclidiennes comme étant identiques à la géométrie des surfaces euclidiennes à courbure constante, positive dans le cas de Riemann, négative dans le cas de Lobatchefski,

[1] *Saggio d'una interpretazione della Geometria non-euclidea*, ap. *Giorn. Mat.*, 1868, p. 248-312; trad. Houël, *Ann. Ec. Norm.*, 1869, p. 251-288.

à condition de faire correspondre aux droites non-euclidiennes les géodésiques de ces surfaces. Minding[1] avait démontré que ces surfaces, et elles seules, peuvent se mouvoir librement en glissant sur elles-mêmes, et cela d'une triple infinité de manières. En distinguant les surfaces à courbure constante d'après la valeur K de leur coubure, et en appelant droites les géodésiques de ces surfaces, on obtient :

1° Pour $K = 0$, les surfaces développables, dont la métrique équivaut à la planimétrie euclidienne.

2° Pour $K > 0$, les surfaces applicables sur une sphère, dont la métrique équivaut à la planimétrie elliptique de courbure K.

3° Pour $K < 0$, les surfaces auxquelles on a donné le nom de pseudo-sphériques, dont la métrique équivaut à la planimétrie hyperbolique de courbure K.

La seule surface euclidienne à courbure constante positive est la sphère. On peut donc, comme l'avaient vu Lambert et Riemann, interpréter euclidiennement la planimétrie elliptique comme métrique des sphères ordinaires. Assimilons des droites riemanniennes aux grands cercles d'une sphère ordinaire, les courbes seront représentées par les petits cercles. On voit de suite que deux droites se rencontrent toujours et qu'elles ne sont jamais parallèles. On ne peut pas prolonger indéfiniment une droite dans sa propre direction, puisque les droites sont des lignes fermées qui reviennent nécessairement sur elles-mêmes, si bien qu'il y a une limite supérieure imposée à la distance de deux points. Deux droites peuvent enclore un espace, ou, ce qui revient au même, deux droites qui ont deux points communs ne coïncident pas dans toute leur étendue. Enfin, l'espace riemannien est nécessairement illimité, puisqu'on peut parcourir le

[1] *J. reine angew. Math.*, 1839, p. 378 ; 1849, p. 324.

périmètre d'une sphère sans jamais rencontrer d'obstacles; mais il n'est pas infini, puisqu'il y a une limite supérieure imposée à la distance de deux points. De l'illimité on ne peut donc pas conclure à l'infini, ce qui apparaissait à Riemann gros de conséquences métaphysiques, et laissait penser à Zöllner[1] qu'on pourrait éviter la seconde antinomie de Kant.

Toutefois, si l'on peut identifier un plan riemannien à une sphère euclidienne, *cela n'est vrai que lorsqu'on envisage les relations intrinsèques des points de ces surfaces, en faisant abstraction des points extérieurs.*

La définition euclidienne de la sphère implique la considération d'un centre, et les distances de ce centre aux divers points des figures inscrites sur la sphère sont comptées suivant des segments de droites ordinaires, que l'on nomme rayons ou diamètres. Dans le plan de Riemann, un tel centre et de telles droites n'ont aucun sens : il y a toujours deux centres symétriques par rapport aux figures tracées, et les distances de chacun des points des figures à ces centres s'évaluent toujours suivant les droites riemanniennes. De plus, la définition du plan implique que, par toute droite, on puisse faire passer une infinité de plans : cette proposition est vraie de la droite riemannienne; elle n'a aucune signification au sujet du grand cercle d'une sphère. « En résumé, dit Paul Mansion, le plan riemannien peut être considéré comme identique à la sphère euclidienne, si l'on n'étudie que les propriétés intrinsèques de ces surfaces; mais, par le fait qu'on les qualifie d'euclidienne ou de riemannienne, on leur attribue des propriétés extrinsèques qui les différencient[2]. »

[1] Zöllner, *Zur Metaphysik des Raumes*, ap. *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig, 1878, t. II.

[2] *Le Plan riemannien est-il identique à la sphère euclidienne?* ap. *Brux. Soc. sc.*, t. XX, 1896.

Klein[1] a fourni une autre interprétation intuitive de la planimétrie riemannienne. Cette géométrie se reflète entièrement dans la géométrie ordinaire des gerbes de droites : en substituant aux « points » du plan, les « droites » de la gerbe, et aux termes « droite » et « distance », ceux de « faisceau » et d' « angle », toutes les propositions de la planimétrie elliptique se trouvent ramenées aux propositions ordinaires de la géométrie de la gerbe, et réciproquement.

A la différence de ce qui se passe pour le plan riemannien, il n'existe pas de surface réelle à courbure constante négative qui offre, dans la géométrie euclidienne, l'image intégrale du plan lobatchefskien. La surface-type qui correspond à ce plan est une sphère de rayon imaginaire, par suite non représentable. Mais il existe des surfaces euclidiennes réelles, appelées pseudo-sphères, dont la métrique est identique à la planimétrie de Lobatchefski, à condition de se restreindre à une région convenablement circonscrite, comprise entre deux arêtes de rebroussement : telles sont les surfaces obtenues en faisant tourner la développante d'une chaînette autour de la génératrice, ou deux demi-branches d'hyperbole autour de leur asymptote. Si on appelle droites les géodésiques de ces surfaces, on constate que, par un point pris hors d'une droite, on peut mener une infinité de droites non-sécantes, dont deux répondent à la définition des parallèles du géomètre russe. On obtient ainsi une interprétation euclidienne d'une région limitée du plan hyperbolique. Cette interprétation est, en quelque sorte, la réciproque de l'interprétation donnée par Lobatchefski, sur les horisphères, de la planimétrie euclidienne.

De son interprétation, Beltrami tire l'argument suivant, pour prouver l'indépendance du postulat d'Euclide :

[1] *Math. Ann.*, 1873, p. 140.

Toutes les géodésiques d'une région convenablement limitée de la pseudo-sphère respectent les axiomes et les postulats d'Euclide, sauf celui des parallèles. Si celui-ci était une conséquence logique des premiers, il s'appliquerait nécessairement aux géodésiques de la pseudo-sphère, ce qui n'est pas. Donc le postulatum est irréductible.

Cette interprétation n'est toutefois pas entièrement satisfaisante. Si elle garantit que le postulat d'Euclide ne puisse être démontré en restant dans le plan, il n'est pas prouvé que cette démonstration soit impossible, en employant des constructions dans l'espace. Aussi les successeurs de Beltrami ont-ils cherché, comme nous le verrons, des interprétations valables pour la géométrie à trois dimensions.

V. Les recherches de Helmholz.

Pour fonder la géométrie métrique, on peut partir indifféremment des deux concepts fondamentaux de *distance* ou de *mouvement ;* à chacun de ces deux concepts correspond un ordre particulier de recherches. Riemann s'est proposé de caractériser la géométrie métrique par l'expression de la distance élémentaire entre deux points infiniment voisins ; postérieurement, Tilly[1] a tenté, sans y parvenir rigoureusement, de caractériser directement l'expression de la distance finie entre les deux points essentiellement distincts. Ce premier ordre de recherches devait céder le pas dans la suite à celui où l'on caractérise la géométrie métrique par les propriétés des mouvements de figures indéformables, envisagés comme étant des transformations ponctuelles des figures dans une

[1] *Mém. Soc. Sc. phys. nat. Bordeaux*, 1880, p. 7-190 ; *Mém. couronnés Mém. Acad. Belgique*, t. XLVII, 1892-1893, p. 3-80.

région de l'espace. Cette procédure est conforme à l'acquisition psychologique des notions métriques qui reposent sur l'existence de solides naturels invariables. Elle a pour point de départ certaines remarques d'Ueberweg, qui conduisirent Helmholtz à un exposé des postulats communs aux trois métriques. En mettant en lumière le caractère fondamental qu'ont les mouvements de constituer un groupe, F. Klein posa le problème sous son véritable jour : comme un problème ressortissant à la théorie des groupes de transformations. Ainsi formulée, la question fut traitée et résolue par Sophus Lie et Henri Poincaré. Enfin, la création de la géométrie projective et l'exposition, indépendante de toute notion métrique, qu'en a donnée von Staudt, devaient conduire Klein à inaugurer une nouvelle voie dans les recherches sur les postulats métriques, la voie projective, où les propriétés métriques des figures deviennent projectives par rapport à une certaine figure fixe appelée l'*Absolu*, et où l'on assimile les divers groupes de mouvements des solides indéformables aux groupes des homographies qui transforment l'*Absolu* en lui-même. C'est ce nouveau développement des géométries non-euclidiennes qu'il va maintenant nous falloir exposer.

Ce sont les travaux d'Helmholtz[1], suscités par les recherches de Riemann, qui forment le lien logique entre ces dernières et la théorie des groupes de transformations.

Riemann caractérise une géométrie par l'expression de l'élément linéaire en fonction des coordonnées. Il choisit, comme expression de cet élément, la racine carrée d'une

[1] *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, ap. *Verh. d. Natur. Vereins Heidelberg*, 1868, p. 197-202; *Wiss. Abhandl.*, Leipzig, 1883, Bd. II, p. 610-617. — *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, ap. *Nachr. Ges. Gött.*, 1868, p. 193-221 ; *Wiss. Abhandl.*, Bd. II, p. 618-639.

fonction quadratique des coordonnées, en disant que c'est l'hypothèse qui se recommande comme étant la plus simple. Il établit que le mouvement sans déformation des figures dans l'espace n'est possible que dans un espace à courbure constante.

Helmholtz, suivant une marche inverse, se propose de justifier l'hypothèse de Riemann sur la forme de l'élément linéaire, en montrant qu'elle est seule compatible avec le libre déplacement des figures dans l'espace, c'est-à-dire avec un espace à courbure constante ou homogène.

Beltrami, dans son *Essai*, avait déclaré : « Le critérium fondamental des démonstrations de la géométrie élémentaire consiste dans la superposition de figures égales[1]. » Helmholtz part d'une remarque semblable, à savoir que : « la base de toute démonstration dans la géométrie euclidienne consiste à établir la congruence de segments, d'angles, de figures planes et solides[2]. » Un tel procédé implique la possibilité de déplacer les figures sans les déformer dans l'espace : c'est le principe fondamental de la géométrie, que Riemann appelle l'axiome de congruence et Helmholtz l'axiome de libre mobilité.

Helmholtz est ainsi conduit à rechercher les conditions analytiques auxquelles satisfait un tel mouvement. Il les énonce explicitement dans les quatre postulats suivants, qu'il considère comme nécessaires et suffisants pour fonder la géométrie métrique :

1° *Postulat touchant la continuité et les dimensions de l'espace*. L'espace est une variété numérique v_n, à n dimensions, où $n = 3$, c'est-à-dire que la position d'un point est déterminée univoquement par trois variables continues, d'ailleurs arbitraires, x_1, x_2, x_3, appelées ses

[1] *Essai*, ap. *Ann. Ec. Norm.*, 1869, p. 252.
[2] *Les Axiomes et la Géométrie*, ap. *Rev. Sc. France et étranger*, juin 1877.

coordonnées, de manière que deux points infiniment voisins soient représentés par des coordonnées infiniment voisines.

La condition $n = 3$ peut n'être introduite qu'après l'énoncé des postulats pour n quelconque. Cette dernière façon de procéder est de beaucoup la plus rationnelle, parce qu'elle revient à définir la structure d'un groupe indépendamment de sa matière.

En vertu de ce postulat, qui implique ceux d'Archimède et de Cantor, le mouvement d'une région de l'espace sera défini par trois équations :

$$x'_1 = f(x_1, x_2, x_3)$$
$$x'_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$
$$x'_3 = \psi(x_1, x_2, x_3).$$

Par cette transformation, un ensemble E de points (x_1, x_2, x_3) devient un autre ensemble E′ de points (x'_1, x'_2, x'_3). On dit, en langage ordinaire, que cette transformation ponctuelle est un mouvement qui amène E en E′.

Helmholtz caractérise alors la notion de corps solide à l'aide du postulat suivant :

2° *Postulat concernant l'existence des corps solides mobiles.* Entre les deux n coordonnées $(x_1, x_2, \dots x_n)$, $(y_1, y_2, \dots y_n)$ de deux points quelconques d'un corps solide, il existe une fonction :

$$\Omega(x_1, x_2, \dots x_n ; y_1, y_2, \dots y_n),$$

correspondant à la relation invariable que nous appelons *distance*, qui est la même pour tous les couples de points congruents aux premiers, c'est-à-dire superposables aux premiers par un déplacement du corps solide dans l'espace ; de sorte que, si l'on désigne par $(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$

et $(y'_1, y'_2, \dots y'_n)$ les coordonnées de ces points après un mouvement quelconque, on aura :

$$\Omega(x_1 x_2, \dots x_n ; y_1, y_2, \dots y_n) = \Omega(x'_1, x'_2, \dots x'_n ; y'_1, y'_2, \dots y'_n).$$

Ce postulat, qui mériterait le nom d'*axiome de distance*, impose des restrictions à la liberté des mouvements des différents points d'un solide rigide, dues aux équations fournies par l'invariant Ω entre les couples de points qui le composent. Ces restrictions conduisent à énoncer un troisième postulat :

3° *Postulat concernant la liberté des mouvements.* Si, dans un solide rigide, on choisit arbitrairement un point quelconque P_1, ce point est entièrement libre de se mouvoir dans toutes les directions. Si, ayant fixé P_1, on choisit ensuite arbitrairement dans le solide un second point P_2, la rigidité du corps implique une équation entre les coordonnées de P_1 et celles de P_2. Si, ayant fixé P_1 et P_2, on choisit encore arbitrairement un troisième point P_3, la rigidité du corps implique deux équations entre les coordonnées de P_3 et celles de P_2 et de P_1, et ainsi de suite. Pour que chaque point d'un corps solide soit entièrement fixé dans l'espace à n dimensions, il faut et il suffit que l'on fixe n points de ce solide ; entre les cordonnées de ces n points, on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations de conditions.

Helmholtz, ayant posé ces trois postulats, se demande si les géométries compatibles avec ces prémisses se réduisent aux trois géométries ordinaires d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann. Il croit devoir faire une réserve. Il y a une géométrie encore concevable, telle que, si l'on fixe les deux points d'un solide et si on fait

tourner celui-là autour de l'axe passant par ces deux points, les dimensions du solide se mettent à croître proportionnellement à l'angle de rotation. Au bout d'un tour complet, la figure ne coïncide plus avec ce qu'elle était auparavant. Elle ne décrit pas une courbe fermée, mais une spirale logarithmique. Pour exclure cette géométrie, Helmholtz énonce un nouveau postulat.

4° *Postulat de monodromie.* Si, dans un espace à n dimensions, $(n - 1)$ points d'un solide restent fixes, de façon qu'une rotation complète autour d'eux amène le corps à coïncider identiquement avec lui-même, la courbe décrite par un point quelconque du solide est fermée.

Des recherches postérieures de Sophus Lie[1] ont montré que ce postulat, nécessaire pour fonder la géométrie plane où $n = 2$, est superflu dans le cas de l'espace où $n = 3$, si bien qu'il est possible de fonder la géométrie métrique générale de l'espace sur les trois premiers postulats, en convenant de les considérer comme valables pour tous les points d'une région de l'espace.

En s'appuyant sur ces quatre postulats, Helmholtz, grâce aux théorèmes bien connus sur les coefficients différentiels des fonctions de plusieurs variables, montre que l'hypothèse admise par Riemann, au sujet de la forme quadratique de l'élément de distance, est seule possible. Ces postulats ne laissent donc subsister que les trois métriques, qui sont ainsi seules compatibles avec le déplacement sans déformation des figures dans l'espace.

Sophus Lie a repris et a confirmé les recherches d'Helmholtz, en y appliquant la théorie des groupes continus de transformations qu'il nous faut maintenant exposer.

[1] S. Lie und F. Engel, *Transformationsgruppen*, Bd. III, p. 437, 498

Avant de passer, toutefois, à ce nouveau chapitre de l'histoire des géométries non-euclidiennes, il importe de bien mettre en lumière la convergence des recherches précédentes.

Pour Riemann, une géométrie est caractérisée par l'expression de l'élément linéaire en fonction des coordonnées. Si l'espace est homogène, si le déplacement sans déformation des figures est possible, cette expression est une forme quadratique, et seules trois métriques sont possibles. Pour Helmholtz, les propositions de la géométrie ordinaire ne sont pas autre chose que les lois des mouvements des corps solides indéformables sur lesquels repose la notion de congruence. Un mouvement sans déformation est celui qui n'altère pas la distance de deux points quelconques d'un corps solide ou encore qui transforme en elle-même l'expression du carré de son élément linéaire : cela n'a lieu que lorsque cette expression est une forme quadratique, et l'on retrouve ainsi, comme seules possibles, les trois métriques de Riemann. Il y a donc trois définitions possibles de ces expressions : *égalité de deux distances*, *déplacements sans déformation*, *solides indéformables*, etc.

Pour aborder les travaux de Sophus Lie, de Félix Klein et d'Henri Poincaré, qui ont donné aux géométries non-euclidiennes leur véritable signification, il nous faut exposer la théorie des groupes de transformations, qui en est le véritable fondement.

CHAPITRE III

LA SYSTÉMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE A L'AIDE DE LA THÉORIE DES GROUPES DE TRANSFORMATIONS

I. La théorie des groupes de transformations.

Etant donné un ensemble, multiplicité ou variété d'objets ou d'éléments quelconques, il suffit, pour que cet ensemble soit défini, que l'on puisse reconnaître : 1° si un objet appartient ou non à cet ensemble ; 2° si deux objets de cet ensemble sont distincts ou non.

Nous dirons qu'un ensemble est une variété à n dimensions si, pour déterminer un élément de cet ensemble, il faut se donner n quantités ou paramètres, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ que l'on peut appeler les coordonnées de l'objet. Par exemple, tous les points d'une ligne constituent une variété à une dimension ; tous les points d'une surface et tous les plans tangents à une surface constituent une variété à deux dimensions ; tous les points de l'espace et tous les plans de l'espace, une variété à trois dimensions ; toutes les droites de l'espace et toutes les sphères de l'espace, une variété à quatre dimensions ; tous les éléments de contact, formés d'un point et d'un plan passant par ce point, et toutes les coniques d'un plan, une variété à cinq dimensions.

Si l'on fait correspondre, suivant une certaine loi, à

chaque élément, de nature quelconque, d'un ensemble E, un élément de nature quelconque d'un autre ensemble E′, on dit que l'on *substitue* E′ à E, ou encore que l'on *transforme* E en E′ ; E′ est dit le *transformé* de E suivant la loi de correspondance adoptée. Si les deux ensembles E et E′ coïncident, la transformation établit alors une certaine correspondance entre les éléments d'une même variété. Une *substitution* ou *transformation* est ainsi une *opération binaire*, qui fait correspondre biunivoquement, suivant une loi déterminée, à chaque élément d'un ensemble, un autre élément soit du même ensemble, soit d'un autre ensemble. Par exemple, en géométrie, la translation, l'homothétie, l'inversion, sont des transformations, puisqu'elles font correspondre, à chaque point d'une figure F, un autre point d'une figure correspondante F′, appelée la transformée de la première suivant la loi de transformation adoptée.

En géométrie, on a commencé par étudier des tranformations relatives à des figures spéciales, avant de s'apercevoir qu'elles n'étaient qu'un cas particulier de transformations beaucoup plus générales, applicables à tous les points de l'espace, du plan ou de la droite, suivant qu'on fait de la géométrie à trois, deux ou une dimension. Par exemple, une des premières transformations étudiée est celle de Mercator, pour représenter la surface de la Terre sur un plan. On a remarqué ensuite que la projection stéréographique n'est qu'un cas particulier d'une transformation plus générale, l'inversion, applicable à tous les points de l'espace. Pour arriver à la conception d'une transformation de l'espace, grâce à laquelle sont transformées les différentes figures sises dans cet espace, il est nécessaire de regarder ces figures comme formées d'éléments infiniment petits, dont l'ensemble constitue l'espace et sur lesquels porte la transformation. Le point de vue le plus habituel consiste à regarder l'espace comme formé

de points qui, associés suivant des lois déterminées, engendrent les figures. Dès lors, une transformation de l'espace est une transformation de tous les points de l'espace, et la transformée d'une figure F est la figure formée de tous les points transformés des points de F. Les transformations ainsi définies sont dites ponctuelles. Nous verrons ultérieurement comment on peut établir d'autres transformations géométriques, en prenant comme élément générateur de l'espace et des figures sises en lui un autre élément que le point.

Désignons par T une transformation déterminée ; si la figure F′ est obtenue en appliquant à la figure F la transformation T, nous dirons que F′ est la transformée de F par T et nous écrirons :

$$F' = FT.$$

Soient S une autre transformation, et F″ la transformée de F′ par S on aura :

$$F'' = F'S = (FT)\, S.$$

La figure F″ est déterminée quand on donne F ; elle s'en déduit par une certaine transformation que nous conviendrons d'appeler *produit de* T *par* S, et que nous désignerons par TS. Le symbole TS est ainsi défini par l'égalité :

$$(FT)\, S = F\, (TS).$$

En général, la multiplication des transformations n'est pas *commutative*, c'est-à-dire que l'on n'a pas, en général, TS = ST. Par contre, elle est *associative*, c'est-à-dire que l'on a, U désignant une troisième transformation :

$$(TS)\, U = T\, (SU)\;;$$

on peut alors désigner chacun de ces produits par TSU.

Si F′ est la transformée de F par T, nous désignerons par T^{-1} la *transformation inverse* qui remplace F′ par F ; par définition, les égalités :

$$F' = FT, \quad F = F'T^{-1},$$

sont équivalentes.

Le produit d'une transformation T et de son inverse T^{-1}, appliqué à une figure F, remplace cette figure par elle-même. C'est ce que l'on appelle une *transformation identique*, désignée par le symbole 1, et l'on a :

$$TT^{-1} = T^{-1}T = 1.$$

Etant donné un ensemble de transformations, appliquées à des éléments quelconques, on dit que cet ensemble forme un groupe, si le produit de deux transformations quelconques de cet ensemble et la transformation inverse de chacune d'elles font encore partie de cet ensemble. On démontre alors que, si cette condition est remplie, un groupe renferme les produits de puissances quelconques des transformations qui y figurent. Par exemple, les similitudes forment un groupe, parce que, si F est semblable à F′ et F′ à F″, F est semblable à F″ ; et, si F est semblable à F′, F′ l'est à F. On voit que, lorsque les transformations effectuées sur les éléments d'un ensemble forment un groupe, il existe entre les éléments de cet ensemble, déclarés alors *homologues*, une relation symétrique et transitive, c'est-à-dire un ou plusieurs éléments communs, dont on peut former le concept abstrait. Ces éléments communs s'appellent les *invariants* d'une figure par rapport au groupe de transformations considéré. Ce sont les propriétés et les relations d'une figure qui ne sont pas altérées par les transformations de ce groupe. Dans les similitudes, ce sont les angles homologues et le rapport des longueurs homologues ; dans les symétries, les angles et les longueurs des figures, mais non leur sens ; dans les inversions, les angles et les contacts, etc.

Les figures homologues, obtenues à l'aide de transformations, qui forment un groupe, sont dites égales par rapport à ce groupe. Tout groupe conduit à définir une certaine sorte d'égalité : ainsi, deux figures sont dites égales en *Analysis situs*, si l'on peut passer de l'une à l'autre à l'aide d'une transformation ponctuelle continue

quelconque ; deux figures sont dites égales, en géométrie projective, si l'on peut passer de l'une à l'autre à l'aide d'une homographie ; deux figures sont dites égales, en géométrie métrique, si l'on peut passer de l'une à l'autre au moyen d'un déplacement. Réciproquement, étant données deux transformations remplaçant, la première une figure quelconque F par la figure égale F′, la seconde la figure F′ par la figure égale F″, le produit de ces deux transformations, qui a pour effet de remplacer la figure F par la figure F″, appartiendra encore aux transformations considérées, puisque les deux figures F et F″, étant égales à F′, sont égales entre elles. Il en résulte que l'axiome : *deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles*, équivaut à cet énoncé ; *les transformations qui permettent d'obtenir des figures égales, les unes à partir des autres, forment un groupe.*

Cela nous conduit à formuler incidemment une remarque importante. La géométrie métrique repose sur la définition de figures métriquement égales, et les axiomes métriques ont pour objet de préciser cette notion. On peut procéder alors de deux façons différentes. On peut partir de la notion de figures égales et définir un déplacement sans déformation comme un mode de transformation ponctuelle, changeant une figure quelconque en une autre figure égale. On peut partir de la notion de déplacement sans déformation, et définir, comme figures égales, deux figures qui dérivent l'une de l'autre par un déplacement sans déformation. Dans le premier cas, on énoncera les propriétés formelles de l'égalité, à savoir : la réflexivité, la symétrie, la transitviité, l'associativité (résultant des trois autres), qui s'expriment logistiquement par les écritures suivantes :

1° $F = F$.

2° $F = G \;.\supset.\; G = F$.

3° F = G, G = H .⊃. F = H.

4° FG = GF.

Dans la seconde façon de procéder, on aura autant de propriétés corrélatives des déplacements :

1° Un déplacement nul fait correspondre à toute figure cette figure elle-même ;

2° Si un déplacement change une figure F dans une figure G, il existe un déplacement inverse amenant G en F ;

3° La transformation, résultant de deux déplacements successifs, est un déplacement ;

4° A et B étant deux points distincts, il existe des déplacements changeant A en B et B en A.

Tout groupe de transformations est caractérisé par ses invariants. On peut alors envisager un groupe comme formé de toutes les opérations, combinées entre elles de toutes les manières possibles, qui respectent certaines propriétés ou relations des objets auxquels on les applique. L'étude de ces propriétés et de ces relations, envisagées au point de vue formel de leurs rapports logiques indépendamment de la nature particulière des objets considérés, se ramène à l'étude de *la loi de composition des opérations du groupe* que l'on appelle sa *structure*.

L'étude de la structure des groupes de transformations conduit à les répartir en différentes classes. Pour cela, il convient d'en donner au préalable une définition analytique. Analytiquement, si l'on a un nombre n de variables indépendantes et une série de transformations de celles-là en de nouvelles variables (les valeurs des paramètres étant seules changées), cette série de transformations forme un groupe, si l'application successive de deux quelconques d'entre elles équivaut à une seule transformation de la série primitive. Le groupe est dit *continu*, lorsque l'on peut passer d'une transformation à

une autre par des variations infinitésimales contenues dans ce groupe ; il est dit *discontinu* dans le cas contraire. Les groupes discontinus se divisent : 1° en groupes discontinus *finis* comprenant un nombre fini de transformations, qui se ramènent aux groupes de substitutions étudiés par Gallois ; 2° en groupes discontinus *infinis* qui contiennent un nombre infini d'opérations, tels que les groupes fuschiens et kleinéens de Poincaré. Les groupes continus se partagent : 1° en groupes continus *finis*, où les variables transformées sont des fonctions des variables primitives dépendant d'un nombre fini de paramètres arbitraires ; 2° en groupes continus *infinis*, où ces fonctions dépendent d'un nombre infini de paramètres arbitraires. La théorie des groupes continus a été fondée par Sophus Lie ; encore celui-ci n'a-t-il envisagé qu'une catégorie très particulière de ces groupes.

D'après ces définitions, il est facile de se rendre compte que les déplacements forment un groupe. En effet, deux déplacements successifs équivalent à un déplacement unique. Ils peuvent être obtenus au moyen d'une série de variations infinitésimales : le groupe est donc continu. Ce groupe admet un *invariant*, qui est une certaine fonction des coordonnées des couples de points de toute figure qui se déplace. Sophus Lie est parti de là pour appliquer la théorie des groupes de transformations au problème posé par Helmholtz : déterminer un système de postulats qui soient à la base de la géométrie générale ; ou, ce qui revient au même, déterminer tous les types possibles de déplacements cinématiques.

II. Les recherches de Sophus Lie.

Sophus Lie[1] suppose tout d'abord que l'espace est une

[1] *Ber. Ges. Lpz.* 38 (1886), *Math.*, p. 337 ; *Theorie der Transformationsgruppe*, t. III, p. 471, 498 (section 6).

variété numérique à trois dimensions (condition qu'il aurait pu n'introduire qu'en dernier lieu); où se trouve fixé un système de coordonnées :

$$v_3 \equiv (x, y, z).$$

Les déplacements dans l'espace, en tant qu'ils sont composables et réversibles, forment un groupe de transformations ponctuelles. Cette hypothèse remplace celle qu'Helmholtz rattache à la notion de congruence, à savoir que la congruence est une relation réciproque et transitive. Le problème d'Helmholtz se ramène à celui-ci : caractériser par des axiomes les groupes de déplacements correspondant aux métriques euclidiennes et non-euclidiennes, en les distinguant de tous les groupes possibles de transformations d'une variété v_3. Sophus Lie est parvenu à deux solutions : l'une, en faisant des hypothèses se rapportant au voisinage infiniment petit de chaque point de la variété v_3; l'autre, en posant les postulats convenant à une région finie de la variété v_3.

Si l'on suit cette dernière voie, où l'on envisagé les propriétés des déplacements dans une région finie, simplement connexe, de l'espace, on arrive au résultat suivant :

La géométrie métrique générale de l'espace peut être fondée au sens différentiel, c'est-à-dire pour une région limitée de l'espace, sur les postulats suivants :

1° L'espace est une variété numérique à trois dimensions (v_3), où l'on peut fixer un système de coordonnées.

2° Les déplacements sans déformation sont des transformations ponctuelles, qui constituent un groupe réel et continu (c'est-à-dire engendré par des transformations infinitésimales), comprenant les inverses de toutes ces transformations.

3° Si l'on fixe arbitrairement un point (y_1^0, y_2^0, y_3^0) de l'espace à trois dimensions, les coordonnées x_1, x_2, x_3 des points avec lesquels un point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) peut être

amené à coïncider par un déplacement convenable satisfont à une équation :

$$\Omega\ (x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ y_3^0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$$

représentant une surface contenant le second point (x_1^0, x_2^0, x_3^0), mais non le premier (y_1^0, y_2^0, y_3^0).

4° Autour d'un point (y_1^0, y_2^0, y_3^0), il existe une région triplement étendue et de dimensions finies, telle que, le point (y_1^0, y_2^0, y_3^0) restant fixe, tout autre point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) de cette région puisse être amené, par un déplacement continu, en un quelconque des points situés sur la surface correspondante définie ci-dessus, c'est-à-dire dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$\Omega = 0.$$

Si l'on admet ces quatre postulats, il n'y a plus que trois métriques possibles, auxquelles correspondent trois groupes distincts, suivant la façon dont on définit la distance de deux points.

Nous conviendrons d'appeler dans la suite *axiomes de Lie* le système précédent de propositions premières. En le formulant, Sophus Lie a montré que la vraie nature de la géométrie est d'être avant tout « l'étude analytique d'un groupe », celui des déplacements[1]. Il a montré, de

[1] Poincaré, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 1895, p. 1. — Comp. *Bulletin de la Société mathématique de France*, séance du 22 novembre 1887, p. 215-216; *S. H.*, p. 90; *R. M. M.*, 1er janvier 1897, p. 64-67; *The Monist*, octobre 1898, p. 9-21. Poincaré apprécie en ces termes l'œuvre de Sophus Lie (*Journal des Savants*, mai 1902, p 269) : « Lie a voulu former tous les types possibles de lois cinématiques. Il a cherché de quelle manière peuvent se combiner les divers mouvements possibles d'un système quelconque, ou, plus généralement, les diverses transformations possibles d'une figure. Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles, l'ensemble de toutes ces transformations forme *un groupe*. A chaque groupe correspond une géométrie, et la nôtre, qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide, n'est qu'un cas très particulier. Mais tous les groupes que l'on peut imaginer posséderont certaines propriétés communes, et ce sont précisément ces propriétés communes qui limitent le caprice des inventeurs de géométries ; ce sont elles, d'ailleurs, que Lie a étudiées toute sa vie. »

plus, que le système d'axiomes choisi par lui caractérise les groupes continus de transformations projectives concernant une quadrique ordinaire ou dégénérée, et les groupes qui leur sont isomorphes, c'est-à-dire qui peuvent s'en déduire au moyen d'une transformation ponctuelle. Nous appellerons *métriques* ces différents groupes.

Les principales propriétés communes aux groupes métriques sont les suivantes (I) :

Il existe une infinité de transformations (ou déplacements), par lesquelles on peut amener un point quelconque A en une position quelconque A′.

Il n'existe pas, en général, de déplacements du groupe capables d'amener à la fois deux points donnés A, B, respectivement en deux positions données A′, B′. Il faut pour cela qu'une certaine quantité, qui dépend de A et de B, soit égale à la quantité analogue formée avec A′ et B′.

S'il existe une transformation du groupe amenant deux points déterminés A, B, respectivement en deux points déterminés A′, B′, il y en a une infinité. En particulier, il existe une infinité de déplacements qui laissent fixes deux points A et B; mais tous ces déplacements laissent également fixe une infinité d'autres points qui forment une certaine ligne, appelée *ligne principale relative au groupe*. D'où il suit que, par deux points quelconques, il passe une ligne principale relative au groupe.

Par trois points quelconques de l'espace, il passe une surface appelée *surface principale relative au groupe*, qui jouit de cette propriété : toute ligne principale relative au groupe passe par deux quelconques de ses points et y est contenue tout entière, etc.

Il existe trois groupes distincts, avec l'infinité de leurs isomorphes, possédant les propriétés (I). Mais l'ensemble des axiomes (I) ne suffit pas à caractériser la structure des groupes métriques. Il faut, pour chacun d'eux, faire appel à un axiome supplémentaire. Si, aux axiomes (I), on joint le suivant (II) :

Il existe, dans le groupe, des déplacements tels que chaque point de l'espace décrive une ligne principale relative au groupe;

il n'existe plus qu'*un seul type de groupes* satisfaisant à l'ensemble des propriétés (I) et (II) : c'est celui qui correspond à la géométrie d'Euclide.

La question des géométries non-euclidiennes s'est longtemps posée sous cette forme : Le groupe des déplacements défini par les propriétés (I), possède-t-il aussi la propriété (II)? Ce qui veut dire : le postulat d'Euclide est-il démontrable ?

Depuis qu'il est établi qu'il n'en est rien, la question des géométries non-euclidiennes s'est posée en ces termes : Avons-nous des raisons *a priori* ou *a posteriori* de définir le *déplacement d'une figure invariable* par l'ensemble des propriétés (I) et (II), c'est-à-dire par le groupe euclidien, et de nommer *plans* et *droites* les surfaces et les lignes principales relatives à ce groupe? Ces raisons sont-elles rationnelles, empiriques ou de simple commodité, ce qui revient à demander : les axiomes d'Euclide sont-ils des vérités nécessaires, des vérités contingentes ou de simples conventions opportunes?

L'axiome (II) qui, joint aux axiomes (I), caractérise le groupe euclidien, a reçu divers énoncés dans la théorie des groupes de transformations.

Etant donné un groupe, appelons *sous-groupe* de ce groupe, tout groupe qui comprend une partie de ses transformations. Un groupe *g* est dit *sous-groupe invariant* du groupe G, s'il est changé en lui-même par une transformation de ce groupe. C'est ainsi que *le groupe des déplacements euclidiens est un sous-groupe invariant du groupe des homothéties ou groupe des similitudes.* En effet, on sait que si l'on effectue sur toutes les figures de l'espace une même homothétie dans un rapport donné, et si l'on altère en même temps l'unité de longueur dans le même rapport, tous les théorèmes de la géométrie ordinaire sont conservés; autrement dit, le groupe de la

géométrie euclidienne est *invariant* par rapport au groupe des similitudes. Cette propriété, qui ne fait intervenir que la structure d'un groupe, suffit à différencier le groupe euclidien des groupes métriques non-euclidiens, qui ne comportent pas de figures semblables. Elle est donc équivalente à l'axiome (II) qui caractérise le groupe euclidien.

Cet axiome peut être encore remplacé par celui-ci : *Le groupe des translations est un sous-groupe invariant du groupe des déplacements.* Une droite D et un demi-plan P passant par D étant donnés, on appelle translation un déplacement changeant les points de D en d'autres points de D, les points de P en d'autres points de P : c'est un glissement du demi-plan P le long de la droite D. Il est évident que le produit des deux translations est encore une translation, et, si l'on transforme une translation par un déplacement, on obtient une autre translation, la droite et le demi-plan étant seulement transportés dans l'espace. Le groupe métrique euclidien jouit seul de cette propriété : il possède le groupe des translations comme sous-groupe invariant.

Avant de quitter les travaux de Lie, une dernière remarque s'impose. Toute transformation ponctuelle, c'est-à-dire toute opération transformant un point de l'espace en un autre, équivaut, en géométrie analytique, à un changement d'axes de coordonnées, et toute propriété invariante par rapport à une transformation ponctuelle est indépendante du changement d'axes correspondants. C'est ce qui résulte directement de la forme donnée aux postulats d'Helmholtz.

Envisageons un système de coordonnées constitué par trois axes euclidiens trirectangles : un point de l'espace sera défini par trois coordonnées x, y, z, qui sont les distances de ce point aux trois plans formés par ces axes. Les coordonnées du même point changent avec le système

auquel on les rapporte et deviennent, par exemple, x', y', z', dans le nouveau système. On appelle formules de transformation des coordonnées, les relations qui expriment les coordonnées anciennes x, y, z, en fonction des nouvelles. Ces relations font intervenir les paramètres, au nombre de six, qui définissent la position relative des deux systèmes d'axes. L'ensemble de toutes ces transformations de coordonnées, correspondant à toutes les valeurs possibles des six paramètres qui caractérisent une transformation, forment un groupe. Ce groupe peut être défini par la propriété suivante : si l'on considère deux points, de coordonnées x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 dans un premier système ; x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, dans un second, il existe une fonction des six coordonnées qui reste inaltérée pour toutes les transformations. C'est l'invariant Ω d'Helmholtz, la distance de deux points, dont le carré d^2 a pour valeur :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$
$$= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Les formules qui expriment les x, y, z en fonction de x', y', z' doivent donc satisfaire à cette condition : si, dans l'expression $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z'_1)^2$, on remplace les x, y, z, par leurs valeurs en fonction des x', y', z', le résultat doit être simplement :

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.$$

Cette condition suffit à caractériser complètement le groupe euclidien. Si nous avions pris des axes non-euclidiens, c'est-à-dire si, au lieu de droites euclidiennes, nous nous étions servis de droites non-euclidiennes, nous eussions trouvé, pour la distance de deux points, un invariant d'une autre forme.

Dans la figure formée par deux points, il y a donc un élément intrinsèque, la distance de ces deux points, qui est indépendant du choix des axes de coordonnées. Dans les figures plus compliquées, d'autres éléments invariants,

d'autres fonctions des coordonnées des points de la figure s'introduisent, qui caractérisent la figure indépendamment du système d'axes employé. La géométrie pure fait intervenir uniquement de pareils éléments et traduit les propriétés d'une figure par des relations entre ces éléments. Les propriétés, ainsi énoncées dans le langage intrinsèque de la géométrie, peuvent s'exprimer, comme dans la géométrie analytique de Descartes, par des relations entre les coordonnées des points de la figure. La forme de ces relations doit évidemment être indépendante du système d'axes adopté; autrement dit, cette forme doit être invariante pour tous les changements de coordonnées, c'est-à-dire pour toutes les transformations du groupe métrique considéré. Le principe de la relativité de l'espace est l'affirmation d'une telle invariance.

Chaque fois que l'on parle d'un *principe de relativité* (géométrique, mécanique, physique, etc.), on a en vue l'étude des invariants relatifs à un certain groupe de transformations; si bien que l'on peut remplacer l'expression : *théorie des invariants relatifs à un groupe de transformations*, par cette autre : *théorie de la relativité par rapport à un groupe*. Ces considérations trouveront leur emploi, lorsque nous serons amenés à parler de la théorie de la relativité de Lorentz, d'Einstein et de Minkowski.

III. Systématisation de la géométrie, d'après la théorie des groupes de transformations.

Les travaux de Sophus Lie montrent que l'objet de la géométrie ordinaire est l'étude d'un groupe, le groupe des déplacements euclidiens. *Ce groupe contient en lui-même toute la géométrie.* En effet, la géométrie a pour but d'étudier celles des propriétés des figures qui restent inaltérées, lorsqu'on leur fait subir un déplacement quel-

conque, c'est-à-dire qui ne dépendent ni de leur position, ni de leur orientation. On peut dire, par suite, que *la géométrie ordinaire est la théorie des invariants du groupe des déplacements euclidiens.*

Ce groupe supposé connu sous sa forme analytique de groupe de transformations à trois variables, tous les théorèmes de la géométrie peuvent s'en déduire par le calcul. Un algébriste, à qui ce groupe serait proposé et qui saurait simplement que les trois variables qui y figurent représentent, suivant une loi inconnue, les points de l'espace, pourrait de lui-même reconstituer les notions de droite, de plan, de distance, etc. Il remarquerait que les transformations du groupe qui laissent fixes deux points donnés, A et B, laissent fixe en même temps une infinité d'autres points formant une ligne, la droite A B; il parviendrait à la notion de figures égales, en considérant les figures transformées au moyen d'une transformation quelconque du groupe ; l'égalité des figures lui permettrait de mesurer les longueurs et les angles, puis de définir le nombre appelé la distance de deux points et les trois nombres appelés coordonnées d'un point. Bref, il pourrait établir toute la géométrie ordinaire et la géométrie analytique, comme on a coutume de la faire. En possession de ces notions, il serait capable de définir toute espèce de groupes de transformations, doués d'une structure différente de celle du groupe euclidien.

On peut dire qu'il y autant de géométries qu'il y a de groupes continus de transformations. Chacune a pour objet l'étude des invariants relatifs à un groupe de cette espèce. En présence d'un tel groupe, on peut toujours se poser la question suivante : trouver toutes les propriétés géométriques que ses transformations n'altèrent pas, c'est-à-dire les propriétés qui subsistent sans modification, lorsqu'on fait subir aux figures de l'espace l'une quelconque des transformations du groupe. L'ensemble de

ces propriétés constitue une géométrie. On peut donc définir une géométrie comme *l'étude des propriétés géométriques qui demeurent invariantes par rapport à un certain groupe de transformations.* Toute géométrie revient ainsi à l'étude algébrique des invariants relatifs à un certain groupe de transformations.

Ce point de vue a été systématisé par Félix Klein, dans son programme d'inauguration du cours de mathématiques à l'Université d'Erlangen[1]. Klein a été conduit à montrer les rapports de subordination et de corrélation existant entre les différentes géométries, métrique, projective, affine, topologique, etc., et à retrouver les résultats de Riemann, d'Helmholtz et de Sophus Lie par une nouvelle voie, la voie projective.

Chaque géométrie, d'après Klein, est caractérisée par le groupe de transformations qui lui correspond. La *géométrie métrique ordinaire* correspond au groupe des transformations formées en combinant les déplacements, les similitudes et les symétries. Les déplacements conservent les longueurs, les angles, et, en outre, le sens des figures ; les similitudes conservent les angles et les rapports des longueurs ; la symétrie par rapport à un plan quelconque conserve les angles et les longueurs, mais non le sens des figures, deux figures symétriques n'étant pas congruentes. Le groupe des transformations formé en combinant les déplacements, les similitudes et les symétries. conserve les angles et les rapports des longueurs, c'est-à-dire la forme d'une figure. A ce groupe, Klein donne le nom de *groupe principal (Hauptgruppe)*. Une propriété d'une figure quelconque sera dite géométrique, quand elle ne sera pas altérée par les transformations de

[1] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät;* Erlangen, 1872; Abgedruckt (mit Zusäten) in *Math. Ann*, 1893, p. 63. Trad. fr. Padé, *Ann. Ec. Norm.*, 1891, p. 87, 173 et suiv.

ce groupe, quand elle sera un invariant du groupe principal.

Les propriétés géométriques sont indépendantes de la position, de la grandeur absolue d'une figure et du sens dans lequel ses parties sont disposées ; il n'y a pas, en géométrie, de grandeur absolue ni de position absolue, ce qui est une première forme de la relativité de l'espace. Il n'y a que des positions relatives et des rapports de grandeurs. C'est pour cela que, quand on démontre un théorème au sujet d'une figure déterminée, il est vrai de toutes les figures de même espèce, quelles que soient leur grandeur et leur position dans l'espace. Une propriété d'une figure qui varie quand la figure se déplace, se dilate ou se renverse, n'est pas une propriété géométrique, c'est une propriété géographique. Dans la géographie, chaque point a un intérêt individuel; il y a une grandeur et une position absolues sur la Terre. Au contraire, la géométrie, comme toutes les sciences abstraites, opère avec des notions de classes, et c'est l'ensemble de toutes les figures égales, semblables et symétriques à une figure donnée, qui constitue l'extension des notions des classes les plus restreintes.

Toutes les propriétés géométriques restent inaltérées pour toutes les transformations du groupe principal G. Il peut être intéressant d'étudier, parmi ces propriétés, quelles sont celles qui sont conservées par un groupe de transformations plus étendu qui contienne G comme sous-groupe. On dit alors que l'on élargit ce dernier groupe, en augmentant le nombre des conditions, et, par suite, en restreignant le nombre des invariants. Tel est le *groupe projectif*, obtenu en élargissant le groupe principal par l'adjonction de nouvelles transformations, les projections et les sections. Le groupe projectif change les droites en droites ; deux figures, par rapport à ce groupe, sont égales, si elles peuvent s'obtenir comme perspec-

tive l'une de l'autre. Les relations métriques de distance de deux points, de parallélisme, de perpendicularité, de régularité, de congruence disparaissent. Seules subsistent les propriétés qui se conservent dans toutes les transformations projectives appelées encore *homographies* ou *collinéations :* telles sont les relations d'ordre et d'appartenance concernant la position des points, des droites et des plans et le nombre appellé rapport anharmonique de quatre points distincts en ligne droite.

Il existe d'autres propriétés géométriques, qui ne sont ni métriques, ni projectives. Ce sont celles qui restent inaltérées lorsqu'on fait subir aux figures des déformations continues quelconques. Telles sont les relations de continuité et d'ordre, inhérentes aux concepts de ligne et de surface, qui caractérisent une variété continue à plusieurs dimensions. Leur étude fait l'objet d'une géométrie purement qualitative, fondée par Euler et Riemann, appelée *théorie du continu*, *Topologie* ou *Analysis Situs*, qui est le substratum commun des deux géométries précédentes. Deux figures sont dites égales, par rapport à ce nouveau groupe, si l'on peut passer de l'une à l'autre au moyen d'une transformation continue quelconque. Une droite est égale à une parabole, un cercle à une ellipse, une sphère à une surface convexe quelconque. L'ordre de connexion des figures et le nombre de leurs dimensions sont les invariants du groupe ainsi défini.

Les trois géométries, l'*Analysis Situs*, la géométrie projective, la géométrie métrique, correspondent à trois groupes de transformations fondamentaux. Chacune d'elles étudie les propriétés qui sont les invariants d'un de ces groupes. Dans la géométrie élémentaire, ces propriétés sont intimement liées entre elles ; elles sont dans un rapport de subordination réciproque tel qu'on ne peut énoncer les propriétés d'un groupe sans se rapporter au moins en partie aux propriétés d'un autre.

C'est le développement de la théorie des groupes de transformations qui a permis de les distinguer, de les répartir en trois classes et de les étudier d'une façon indépendante. Grâce à cette classification, on peut reconnaître à quelle géométrie appartiennent les théorèmes que l'on trouve indistinctement énoncés dans la géométrie élémentaire. Soient les trois théorèmes suivants : « Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles » ; « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en deux parties égales » ; « le nombre des arêtes d'un polyèdre convexe, augmenté de deux, est égal au nombre des faces, augmenté de celui des sommets » : le premier est un théorème de géométrie métrique, le second est un théorème de géographie projective, le troisième, appelé théorème de Descartes, appartient à l'*Analysis Situs*.

F. Enriques[1] a montré que les trois classes de propriétés, étudiées par les trois géométries, correspondent, au point de vue de leur psychogénèse, à trois groupes de sensations :

1° Les propriétés qualitatives, qui concernent les rapports d'ordre et de continuité des lignes et des surfaces, se rapportent au sens général du tact;

2° Les qualités projectives, qui concernent les rapports d'appartenance des points, des droites et des plans, se rapportent aux sensations visuelles ;

3° Les propriétés métriques, qui concernent les rapports de congruence et de parallélisme, se rapportent aux sensations tactilo-musculaires que nous procurent nos organes explorateurs.

Il existe d'autres groupes continus de transformations auxquels correspondent d'autres géométries. Parmi

[1] *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologne, 1900, p. 16 et suiv.; *Rivista filosofica*, 1901, p. 76; *les Concepts fondamentaux de la Science*, trad. Rougier, chap. III et IV, p. 42-83.

toutes les transformations homographiques, considérons celles qui conservent le plan de l'infini : elles forment un groupe, le *groupe des affinités*, dénommé aussi *groupe linéaire général*, qui est un sous-groupe du groupe projectif. Le groupe des affinités conserve le parallélisme, mais non la perpendicularité : il est donc plus étendu que le groupe G, qui en est le sous-groupe. Dans la géométrie métrique, toutes les transformations conservent le parallélisme, les angles et les rapports des longueurs ; dans la géométrie affine, la rigidité des angles disparaît, mais le parallélisme des droites et des plans est conservé ; dans la géométrie projective, la rigidité des angles disparaît, aussi bien que le parallélisme, mais la rigidité des droites subsiste encore ; dans l'*Analysis situs* toute rigidité disparaît. On peut dire, en matérialisant cette idée, que l'espace, dans l'*Analysis situs*, est un continuum amorphe, un espace gélatineux ; dans la géométrie projective, c'est un réseau de droites enchevêtrées ; dans la géométrie affine, c'est un espace articulé, parallélogrammique ; dans la géométrie métrique, c'est un espace formé de figures indéformables, cristallisé [1].

Parmi les transformations affines ou linéaires, celles qui conservent le cercle imaginaire de l'infini forment le *groupe principal* ou *groupe des similitudes*. Parmi les similitudes, il y a lieu de distinguer celles pour lesquelles le rapport de similitude est égal à 1. On peut répartir celles-ci en deux classes, suivant que les figures sont superposables ou non. Dans le premier cas, la transformation est un déplacement, et le *groupe des déplacements* est, comme nous l'avons déjà vu, un sous-groupe invariant du groupe des similitudes. Dans le second cas, on obtient un retournement : les retournements ne forment pas un groupe, parce que le produit de deux retournements

[1] Cf. J. Rey Pastor, *la Systématisation de la Géométrie au moyen de la théorie des groupes*, ap. *Scientia*, juin 1918, p. 420.

est un déplacement. Il y a lieu de remarquer qu'un déplacement est équivalent au produit de deux symétries si bien que les produits d'un nombre pair de symétries forment un groupe, celui des déplacements.

Il existe encore d'autres groupes intermédiaires, moins importants, qui correspondent à d'autres géométries possibles : la crémonienne, la ponctuelle, etc.[1]

Toutes les géométries précédentes ont ceci de commun : deux courbes ou surfaces tangentes se transforment en courbes ou surfaces tangentes. L'idée est venue à Sophus Lie[2] de faire abstraction de toutes les autres relations géométriques et de définir un système très large de transformations assujetties à la seule condition de respecter les contacts des figures. C'est le *groupe des transformations de contact*, dont tous les groupes précédents sont des sous-groupes. Dans ce groupe, l'élément qui engendre les figures de l'espace n'est ni le point, ni la droite ; c'est un élément formé d'un point et d'un petit segment plan, passant par ce point, appelé élément de contact ou écaille, et qui nécessite cinq coordonnées pour être analytiquement défini. Deux multiplicités, qui ont un élément de contact commun, sont dites tangentes ; une transformation est de contact, si elle transforme deux multiplicités tangentes en deux multiplicités tangentes : ces multiplicités sont alors égales par rapport au groupe considéré.

Appelons *propriétés caractéristiques* d'une géométrie, celles qui forment l'objet des théorèmes de cette géométrie et qui n'appartiennent pas aux figures qu'étudient des géométries plus générales. Appelons *groupe fondamental* ou *groupe maximum des transformations* d'une

[1] On les trouve systématiquement exposées dans l'ouvrage suivant : J. Rey Pastor, *Fundamentos de la geometria proyectiva superior*, Madrid, 1916.

[2] *Geometrie der Beruhrungstransformationen*, Leipzig, 1896.

géométrie, les transformations que l'on peut opérer sur les points de l'espace sans altérer les propriétés caractéristiques de cette géométrie. On devra alors s'arranger, au point de vue logique, pour choisir les concepts premiers d'une géométrie de telle sorte qu'ils soient des *invariants* par rapport au groupe fondamental correspondant, sans l'être pour un groupe plus étendu ou plus restreint. Dans ce cas seulement, la géométrie considérée sera indépendante des géométries plus particulières qui lui sont subordonnées. Un des défauts de l'*Analysis situs* de nos jours est de présupposer la notion euclidienne de *longueur*, qui n'est nullement invariante par rapport au groupe des continuités. Un des défauts de la géométrie projective a été, pendant longtemps, de reposer sur des notions métriques, celles de demi-droite, de demi-cône, etc., qui ne sont pas invariantes pour les transformations homographiques. Enfin, il convient d'exclure des notions premières de la géométrie élémentaire celles de ligne, de surface, qui sont invariantes pour les transformations d'un groupe beaucoup plus large, correspondant à l'*Analysis situs*; de même que, pour le même motif, les notions de segment et de droite, qui sont invariantes pour le groupe des affinités.

La géométrie élémentaire ayant été constituée la première, il est tout naturel que les autres géométries, obtenues à partir d'elle par voie d'abstraction, aient été longtemps encombrées de notions métriques, dont il est indispensable qu'elles se défassent progressivement. L'effort des logiciens s'est surtout employé à rendre la géométrie projective autonome. Von Staudt[1] s'est préoccupé le premier de donner de cette géométrie un exposé indépendant des notions métriques d'angle, de distance, de rapport anharmonique. Dans sa théorie, il ne fait

[1] *Geometrie der Lage*, Nuremberg, 1847.

intervenir que des axiomes concernant l'ordre et l'appartenance des éléments fondamentaux, points et droites. En ne faisant usage que de propositions très simples sur les combinaisons des points, des droites et des plans, il arrive à définir la division harmonique et la projectivité ; mais la démonstration qu'il trouve, pour justifier sa définition, exige, pour être valable, que la notion de point-limite s'applique à la géométrie projective. A cette époque, cette notion était introduite en recourant à celle de parallélisme, caractérisée par une égalité d'angles ou par une congruence dans une rotation, concepts essentiellement métriques. Pour parfaire l'œuvre de Staudt, il fallait affranchir la géométrie projective du postulat d'Euclide. C'est à quoi est parvenu F. Klein [1], en faisant appel à l'axiome de continuité, utilisé déjà en géométrie ordinaire.

IV. Subordination des groupes : le principe de Klein.

Nous venons de voir que les groupes de transformations peuvent se subordonner les uns aux autres, par degré de généralité décroissante et de complexité croissante, en allant du plus étendu au plus restreint. C'est ce que l'on exprime en disant que les groupes subordonnés sont des sous-groupes du groupe le plus général. Les transformations de ce groupe comprennent, comme cas particuliers, les transformations des groupes plus restreints ; les transformations de contact comprennent les transformations continues, qui comprennent les homographies, qui comprennent les affinités, qui comprennent les similitudes, qui comprennent les déplacements. Les propriétés géométriques, conservées par le groupe le plus général, le

[1] *Nachr. Ges. Gött*, 1871, p. 418; *Math. Ann.*, 1871, p. 573; 1873, p. 112; 1874, p. 534; 1880, p. 52.

sont aussi par ces sous-groupes, mais non réciproquement : les propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations d'un groupe cessent de subsister en partie dans un groupe plus étendu. Ainsi les relations métriques de congruence, de parallélisme, de perpendicularité, de régularité, ne subsistent pas dans le groupe projectif ; pareillement, les notions projectives de droite et de plan ne subsistent pas dans l'*Analysis situs*, où l'on n'envisage que des variétés à une ou plusieurs dimensions.

Etant donné le groupe fondamental d'une géométrie déterminée, on peut se proposer de définir les conditions qui permettent de l'obtenir en partant d'un groupe plus étendu. Félix Klein a établi ce théorème, que nous appellerons, pour abréger, le *principe de Klein :*

Si l'on veut remplacer le groupe fondamental g par un groupe plus étendu G, une partie seulement des propriétés géométriques de l'espace est conservée. Les autres propriétés n'apparaissent plus comme des propriétés intrinsèques des figures de l'espace, mais comme des propriétés, invariantes relativement au groupe G, du système formé en adjoignant aux points de l'espace une figure fixe, assujettie à cette unique condition : les transformations du groupe G, qui changent cette figure en elle-même, sont celles du groupe fondamental g.

Ce théorème comporte le corollaire suivant :

Il est équivalent d'adjoindre aux figures ou aux points de l'espace une figure fixe et d'étudier les propriétés, invariantes par rapport à un groupe G, du système ainsi obtenu ; ou de restreindre l'étude du groupe G aux seules transformations qui n'altèrent pas la figure fixe considérée.

Le *principe de Klein* permet d'obtenir, en partant d'un groupe donné, des groupes de plus en plus restreints, par l'adjonction d'une figure invariante. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'obtenir le groupe métrique en

partant du groupe projectif. Les propriétés métriques d'une figure F ou, plus généralement, des points de l'espace, apparaîtront comme des propriétés projectives de la figure plus complète formée par F et une surface fixe, appelée surface fondamentale ou *Absolu*, qui est une quadrique, ordinaire dans le cas des géométries non-euclidiennes, et dégénérée (cercle imaginaire de l'infini) dans le cas de la géométrie euclidienne. La géométrie métrique se présente alors comme une spécialisation de la géométrie projective par l'adjonction aux points de l'espace d'une quadrique fixe en elle-même. L'étude métrique des déplacements est ainsi ramenée à l'étude projective des homographies qui laissent invariante une certaine forme quadrique à l'infini. En vertu du corollaire de Klein, deux voies se présentent alors pour développer la géométrie métrique ordinaire du point de vue projectif : la première consiste à étudier les propriétés projectives des figures de l'espace par rapport au cercle imaginaire de l'infini ; la seconde consiste à étudier les propriétés invariantes, non pour toutes les transformations du groupe projectif, mais seulement pour celles qui n'altèrent pas le cercle imaginaire de l'infini et qui sont justement les déplacements, les similitudes, les symétries ou les combinaisons de ces opérations qui constituent le groupe métrique.

V. Application du principe de Klein : l'interprétation métrico-projective des géométries non-euclidiennes.

Une des applications les plus remarquables du principe de Klein est celle qui a conduit cet auteur à l'interprétation projective des métriques euclidienne et non-euclidiennes.

Le premier en date, Cayley[1] considéra les propriétés

[1] *A Sixth Memoir on Quantics*, ap. *Lond. Phil. Trans.*, 1859, p. 61-90 ; *Coll. Math. Papers, Cambridge*, 1889, t. II, p. 561-592 ; *Phil. Trans.*, 1870, p. 51 ; *Papers*, 1893, t. III, p. 465.

métriques de l'espace, comme les propriétés projectives d'un espace plus complet formé par l'adjonction aux points de l'espace euclidien du cercle imaginaire de l'infini, donné dans un plan impropre à l'infini, comme intersection imaginaire de toutes les sphères de l'espace. Cette figure a la propriété de n'être transformée en elle-même que par celles des transformations du groupe projectif qui sont des transformations du groupe métrique. Dans ses recherches purement analytiques, Cayley envisage les expressions les plus générales de la distance de deux points et de l'angle de deux plans comme des invariants par rapport à une conique quelconque, arbitrairement fixée, qu'il appelle *conique absolue* ou simplement l'*Absolu* du plan. Il interprète ensuite les formules ainsi obtenues dans le cas où la conique absolue est le cercle des sphères imaginaires dans le plan à l'infini. Il envisage, enfin, le cas où la conique absolue dégénère en un couple de points, et il observe qu'il se ramène à celui de la métrique euclidienne des figures situées dans un plan ordinaire, lorsqu'on fait coïncider les deux points fondamentaux imaginaires avec deux points déterminés du plan, les deux points circulaires. Ainsi se trouve édifié le système géométrique qu'il appelle *métrique projective;* et, plein d'un légitime orgueil, il s'écrie : « Projective geometry is all geometry ». Il explique ainsi sa pensée : « Les propriétés métriques des figures ne sont pas des propriétés de figures considérées en soi, indépendamment de tout autre, mais ce sont leurs propriétés projectives, lorsqu'on les considère en connexion avec une autre figure, à savoir la conique appelée *Absolu* », si bien que « la géométrie métrique n'est qu'une partie de la géométrie projective ».

Les recherches de Cayley sont purement analytiques. Elles se bornent à montrer l'identité de la métrique euclidienne et de la métrique projective, dans le cas le

plus simple, celui du plan. En 1871, F. Klein[1], en partant du système projectif de von Staudt, qu'il affranchit du postulat des parallèles, montra, par des considérations d'ordre géométrique, comment la géométrie projective de Cayley comprend, comme cas particuliers, les trois métriques, tant pour le plan que pour l'espace. Pour cela, il envisage les différentes formes que peut prendre l'*Absolu*, et il introduit, dans l'expression de la distance de deux points, un paramètre constant K, susceptible de prendre, suivant les cas, une valeur réelle ou purement imaginaire.

Considérons, à cet effet, une surface du second degré, supposée quelconque, appelée *quadrique fondamentale* ou *Absolu*. Deux points de l'espace A et B déterminent, par l'intersection de la ligne AB qui les joint et de la surface, deux points P et Q sur cette dernière. Le logarithme du rapport anharmonique (A B P Q), multiplié par une constance arbitraire K, sera dit *la distance des deux points donnés*. Pareillement, étant donnés deux plans, on peut, par leur intersection, mener deux plans tangents à la surface fondamentale. Ceux-ci déterminent avec les plans donnés un certain rapport anharmonique. Le logarithme de ce rapport anharmonique, multiplie par la constante arbitraire K, sera dit l'*angle des deux plans*. Il résulte de ces définitions que les points de la surface fondamentale sont à une distance infinie de tous les autres points, l'*Absolu* étant l'ensemble des points à l'infini. Une transformation n'altérant pas l'*Absolu* changera P et Q en deux autres points de l'*Absolu*, A et B en deux points A′ et B′, A B en A′ B′. Nous appellerons déplacement une pareille transformation, si elle équivaut à une suite continue de transformations; ce sera une symétrie

[1] *Math. Ann.*, 1871, p. 573; 1890, p. 544; *Nicht-euklidische Geometrie*, Göttingen, 1889-1890, t. I, p. 98 et suiv.

dans le cas contraire. On obtient ainsi une détermination métrique projective générale, qui permet de retrouver les trois géométries métriques, lorsque l'on précise la nature de l'*Absolu*, comme il suit :

1° Lorsque l'*Absolu* dégénère en section conique imaginaire. on obtient une métrique correspondant à la géométrie parabolique ou ordinaire.

2° Lorsque l'*Absolu* est une quadrique imaginaire, fixée arbitrairement, on obtient une métrique correspondant à la géométrie elliptique.

3° Lorsque l'*Absolu* est une quadrique réelle, autre qu'une surface réglée, on obtient une métrique correspondant à la géométrie hyperbolique.

Dans le cas elliptique, la constante arbitraire (vecteur choisi pour unité) K est un nombre imaginaire; dans le cas hyperbolique, K est un nombre réel; dans le cas parabolique, K est égal à l'infini. La géométrie parabolique se présente comme un cas limite de la géométrie hyperbolique.

Envisageons, en particulier, l'interprétation projective des métriques non-euclidiennes Dans le cas de la géométrie elliptique, où l'*Absolu* est une surface imaginaire, les points P et Q, où A B coupe l'*Absolu*, étant imaginaires, on appellera distance A B le logarithme de (A B P Q) divisé par $2i$. Aucune droite n'ayant de points à l'infini, la droite sera une courbe fermée de longueur finie. On est conduit immédiatement à des formules trigonométriques qui sont celles de la géométrie elliptique : ce sont les formules de la trigonométrie sphérique ordinaire, dans lesquelles le rayon de la sphère est représenté par la constante :

$$\frac{K}{\sqrt{-1}}.$$

Considérons le cas de la géométrie hyperbolique. Si l'on se borne aux constructions qui ne sortent pas de

l'intérieur de la surface, en faisant usage de la détermination métrique correspondante, ces constructions obéissent aux mêmes lois que la géométrie hyperbolique établie pour les constructions dans l'espace. Toute droite, par exemple, a deux points réels à l'infini, car toute droite passant par l'intérieur de la surface coupe la surface en deux points réels. Par un point, on peut mener à une droite deux parallèles, les deux droites qui joignent ce point aux deux points d'intersection de la droite donnée de l'*Absolu*.

On obtient ainsi, pour les trois géométries métriques, des images adéquates dans la détermination métrique projective générale de Cayley, en supposant l'*Absolu*, tantôt dégénérant en section conique imaginaire, tantôt imaginaire, tantôt réel et non réglé. Mais ces images se changent dans l'objet même qu'elles représentent, lorsque, dans le cas de la géométrie parabolique, on fait coïncider la conique fondamentale avec une conique déterminée, le cercle imaginaire à l'infini; dans le cas des géométries elliptique et parabolique, lorsqu'on fait coïncider deux surfaces absolues avec une surface du second degré déterminée.

Il convient de démontrer maintenant que les trois métriques ordinaires sont seules possibles. Pour cela, Klein part de la détermination métrique projective des déplacements des figures. Dans la métrique ordinaire, les déplacements d'une figure sont formés par les mouvements, en nombre sextuplement infini, qui n'altèrent pas la distance des couples de points de la figure. Dans la métrique projective, les déplacements d'une figure seront formés par les homographies qui laissent en outre invariable une surface, la surface des points à l'infini, et qui s'expriment analytiquement par des substitutions linéaires. On démontre alors que seules les surfaces du second degré sont changées en elles-mêmes après un

nombre sextuplement infini de substitutions linéaires. Les points à l'infini, qui constituent l'*Absolu*, doivent ainsi former une surface du second degré. Pour déterminer l'espèce de surface du second degré qui doit servir à la détermination métrique, il suffit de remarquer qu'un plan, tournant continuellement autour de son axe situé dans ce plan à une distance finie, revient à sa position initiale, ce qui suppose que deux plans tangents, que l'on peut mener à la surface fondamentale par une droite située à une distance finie, sont imaginaires. Or, ils ne sont imaginaires que dans les trois cas précédemment définis.

Les recherches métrico-projectives de Klein concordent ainsi avec celles de Riemann en géométrie différentielle analytique, et avec celles d'Helmholtz, pour établir que, si l'on admet le libre déplacement des figures, il y a trois définitions possibles, et trois seulement, de la distance de deux points ou de la forme des corps.

CHAPITRE IV

L'ISOMORPHISME DES GROUPES ET LES INTERPRÉTATIONS EUCLIDIENNES DES MÉTRIQUES NON-EUCLIDIENNES

I. L'Isomorphisme des groupes : le principe de l'équivalence et le principe de Plucker.

Soient deux groupes de transformations G et G′, portant sur deux ensembles d'éléments de nature différente E et E′, comprenant des opérations d'un caractère tout différent. Supposons ces groupes astreints à vérifier les deux conditions suivantes : 1° à chaque opération de G correspond une opération de G′ et une seule ; 2° au produit de deux opérations quelconques de G correspond le produit de deux opérations correspondantes de G′ ; ces deux groupes sont dits *isomorphes*. Ils ne diffèrent que par leur contenu matériel ; au point de vue formel, ils sont mathématiquement identiques. On dit alors qu'ils ont même structure, seules les propriétés formelles intervenant dans la définition de la structure d'un groupe et les propriétés formelles étant précisément celles qui sont communes à tous les groupes isomorphes. La structure d'un groupe se ramène elle-même à la loi de la combinaison de ses opérations. On peut donc dire que deux groupes d'opérations sont isomorphes, quelle que soit la nature des opérations, si ces opérations se laissent combiner suivant les mêmes lois.

En partant de ces définitions, on peut énoncer un principe d'une importance capitale, que nous appellerons le *principe d'équivalence : La condition nécessaire et suffisante pour que deux géométries soient équivalentes, c'est-à-dire formellement identiques, c'est qu'elles correspondent à deux groupes fondamentaux isomorphes.*

Etant donnés une multiplicité E et un groupe de transformations G par rapport auquel on l'étudie, on peut toujours obtenir des groupes isomorphes, et, par suite, des géométries équivalentes, par le procédé suivant. On cherche une transformation H, ne faisant pas partie du groupe, qui transforme la multiplicité E en une autre E′, et les opérations du groupe E en celles d'un autre groupe, appelé le *transformé de G par la transformation H*, ce que l'on écrit H^{-1} GH. Alors, à chaque opération de G correspondra une opération de H^{-1} GH et une seule ; au produit de deux opérations quelconques du premier groupe, le produit des deux opérations correspondantes du second ; à toute propriété d'un objet de E, par rapport au groupe G, une propriété identique, relativement au groupe H^{-1} GH, de l'objet correspondant de E′. Ces deux groupes étant isomorphes, les géométries qui leur correspondent sont équivalentes.

La première application du principe d'équivalence fut la découverte par Gergonne[1] du *principe de dualité* en géométrie projective, comme généralisation de la méthode des polaires réciproques de Poncelet. Ce principe permet de transformer chaque proposition projective, portant sur des rapports d'appartenance, d'ordre ou sur le rapport anharmonique, en une autre proposition, dans laquelle l'élément générateur des figures est différent ; les figures qui se correspondent ainsi sont dites *corrélatives*. Ainsi, les théorèmes de la géométrie projective restent vrais, si

[1] *Ann. Math. pures et appl.*, 1818, p. 321 ; 1824, p. 157.

l'on substitue la droite au point, dans la géométrie plane ; le plan au point, dans la géométrie dans l'espace ; la droite au plan, dans la gerbe (faisceau de droites qui se coupent en un point). On obtient les propositions corrélatives suivantes :

1. Par un *point* il passe une infinité de *droites*.
2. Deux *points* déterminent une *droite*.
3. Par un *point* il passe une infinité de *plans*.
4 Deux *points* déterminent une *droite*.

1. Sur une *droite* il y a une infinité de *points*.
2. Deux *droites* déterminent un *point*.
3. Dans un *plan* il y a une infinité de *points*.
4. Deux *plans* déterminent une *droite*.

Les verbes *passer par*, *y avoir* expriment l'idée d'appartenance.

Ces exemples montrent que le point se déduit de la droite, de la même façon que la droite se déduit du point, et le point du plan, de la même façon que le plan se déduit du point, si bien que l'on peut prendre, comme élément générateur des figures planes, le point ou la droite ; comme élément de l'espace, le point ou le plan. On peut envisager une figure plane, comme formée de points ou comme enveloppe de droites. Une courbe, au point de vue graphique, peut se déterminer, soit par ses points, soit par ses tangentes. On peut dire, en effet :

1. Une courbe est engendrée par un *point* mobile.
2. Une *tangente* à une courbe est la droite qui passe par deux *points* infiniment voisins.

1. Une courbe est enveloppée par une *droite* mobile.
2. Un *point* d'une courbe est le *point* d'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

Cette remarque a conduit simultanément Chasles et Plücker à introduire, à côté des systèmes de coordonnées ponctuelles qui définissent des points, des systèmes de coordonnées tangentielles qui définissent des droites. Il

résulte de là que toutes les propriétés projectives des figures ne sont pas modifiées par une transformation par dualité, ou encore que *le groupe des transformations projectives peut être transfomé par dualité en un groupe isomorphe, où seul l'élément générateur des figures est changé*.

Le *principe de dualité* qui permet, selon le mot de Gergonne, « de faire de la géométrie en partie double », montre que l'on peut prendre, comme élément de l'espace, des figures autres que les points : les droites, par exemple, ou les plans. Si l'on prend la droite, l'espace aura quatre dimensions, car il faut quatre paramètres pour déterminer la position d'une droite. On admettra, comme notion primitive, celle de l'intersection de deux droites. Si l'on envisage l'ensemble des droites qui rencontrent à la fois deux droites D et D′ qui s'intersectent, on sera conduit à les répartir en deux groupes : l'un de ces groupes s'appellera gerbe, l'autre plan. La notion de gerbe équivaudra à la notion de point, car une gerbe est l'ensemble des droites passant par un même point. Toute proposition concernant les plans sera vraie des gerbes, en sorte que le *principe de dualité* se présente, en géométrie réglée, d'une façon beaucoup plus naturelle qu'en géométrie ponctuelle. Si l'on prend, comme élément de l'espace, le plan, l'espace n'aura plus que trois dimensions : un point sera la figure formée par tous les plans qui passent par ce point, une surface sera la figure formée par tous les plans qui lui sont tangents, etc. Au lieu de considérer des transformations ponctuelles par lesquelles, à tout point d'une figure primitive, correspond un point d'une figure transformée, on considérera des transformations tangentielles, qui font correspondre un plan à un plan. D'une manière générale, *étant donnée l'indétermination laissée au mot point dans les propositions premières de la géométrie, le choix de l'élément*

générateur de l'espace est arbitraire, pourvu qu'il respecte les rapports logiques énoncés dans les propositions premières de la géométrie : c'est ce qu'on appelle le *principe de Plücker*, du nom du géomètre qui l'a fait prévaloir [1]. Par exemple, on peut attribuer le nom de *points* aux *cercles d'un plan ;* on fixera d'une manière convenable ce que l'on convient d'entendre par distance de deux cercles et *quels systèmes de cercles* seront désignés de nom de *droites* et de *plans*. Si ces définitions peuvent être posées de façon que les relations logiques énoncées entre les *points* et les *classes de points* dans les postulats de la géométrie puissent être valables pour les cercles et les systèmes de cercles, il n'y aura plus qu'à poser une correspondance entre l'espace ponctuel ordinaire et l'espace des cercles, pour qu'à chaque figure formée de points corresponde une figure formée de cercles, et pour que toute proposition concernant la première se traduise, suivant la dualité admise, par une proposition concernant la seconde. La géométrie de l'espace ponctuel et la géométrie de l'espace des cercles sont équivalentes. Pareillement, Sophus Lie a trouvé une transformation qui permet de transformer la géométrie de l'espace réglé de Plücker, qui est à quatre dimensions, dans la géométrie des sphères. Un point, au lieu de correspondre à deux droites qui se coupent, correspond à deux sphères tangentes ; une surface, au lieu d'être un système de points ou enveloppe de droites, est l'ensemble de toutes les sphères qui la touchent ; les lignes asymptotiques d'une surface correspondent aux lignes de courbure de sa transformée. Les théorèmes des deux géométries se correspondent biunivoquement, si bien que ces deux géométries sont équivalentes.

[1] *Analytisch-geometrischen Entwicklungen*, Essen, 1831, t. II, p. 697.

Dans la théorie des groupes de transformations, on peut donner au *principe de Plücker* l'énoncé suivant :

Etant donnée une géométrie, on peut considérer indifféremment, comme éléments générateurs de l'espace, certaines figures, formant ce qu'on appelle un corps, à une double condition :

1° Que ces figures soient transformées entre elles par le groupe fondamental qui correspond à cette géométrie ;

2° Qu'il n'existe aucune transformation du groupe fondamental (autre que la transformation identique) laissant invariante chacune des figures du corps.

Quel que soit le corps choisi, toute figure peut être regardée comme formée par des éléments du corps. En géométrie ordinaire, comme nous venons de le voir, si l'on engendre l'espace par des plans, un point est la figure formée par tous les plans qui passent par ce point, une surface est la figure formée par tous les plans osculateurs, etc. En tenant compte des conditions énoncées dans le *principe de Plücker*, on pourra choisir arbitrairement comme éléments d'espace, en géométrie euclidienne, les droites, les plans, les cercles, les tétraèdes, les trièdres trirectangles, etc., et même des figures plus compliquées, comme les complexes linéaires, les faisceaux de quadriques, etc. Si les nouveaux éléments générateurs de l'espace ne dépendent que de paramètres en nombre fini, le groupe fondamental transformera entre eux ces paramètres, qui joueront ainsi le rôle que jouaient les coordonnées des points. On obtiendra un nouveau groupe fondamental, d'une forme analytique, en général, toute différente, qui pourra n'avoir pas le même nombre de variables, mais qui représentera les faits géométriques tout aussi bien que l'ancien, avec lequel il est isomorphe, étant son transformé suivant la dualité admise.

Il résulte de là que l'axiome : *l'espace a trois dimensions*, n'est ni une vérité rationnelle *a priori*, ni une

vérité empirique *a posteriori*, mais une simple convention. Dire que l'espace a trois dimensions signifie qu'on a choisi comme élément de l'espace le point ou le plan. Si on avait pris la droite, l'espace aurait quatre dimensions, car il faut quatre quantités pour définir les deux projections d'une droite sur deux plans de coordonnées, etc. Tous les faits géométriques seraient également bien systématisés dans une géométrie à quatre ou à cinq dimensions, et Poincaré a montré qu'il en serait de même pour l'expression des lois physiques : ce seraient les mêmes lois exprimées par d'autres équations[1]. *Le nombre de dimensions d'un groupe est donc un élément matériel qui n'intervient pas dans l'étude formelle de sa structure.* Des géométries à trois, quatre, *n* dimensions, comme la géométrie de l'espace ponctuel, celle de l'espace réglé, celle de l'espace des sphères, peuvent être équivalentes, si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes : seuls, lorsque l'on passera, suivant une certaine dualité, d'un certain élément de l'espace à un autre, l'ordre des théorèmes et leurs liaisons seront modifiés.

Considérons deux géométries différentes, étudiant des espaces n'ayant pas nécessairement le même nombre de dimensions. Si l'on peut choisir un corps d'éléments générateurs du premier espace, et, pour ces éléments générateurs, un système de coordonnées, de telle manière que le groupe fondamental de la première géométrie devienne identique au groupe fondamental de la seconde, les deux géométries seront *équivalentes*. On pourra, dans ce cas, établir une correspondance entre les figures, les notions, les définitions des deux géométries, de manière que les théorèmes des deux géométries deviennent identiques. C'est le point de départ d'une série d'interprétations euclidiennes des métriques non-euclidiennes.

[1] *D. P.*, chap. III.

Le *principe d'équivalence* a reçu de très nombreuses applications. L'une des plus célèbres est l'équivalence de la géométrie projective de l'espace réglé de Plücker et de la géométrie de contact des sphères orientées de Sophus Lie. D'autres équivalences, plus élémentaires, sont fréquemment utilisées, en particulier dans la théorie des groupes fuchsiens et dans la théorie arithmétique des formes quadratiques. Il existe, en effet, plusieurs géométries importantes, dont le groupe fondamental peut être ramené, moyennant un choix convenable des éléments générateurs de l'espace, au groupe des transformations homographiques d'une variable. A cette catégorie de géométries appartiennent la géométrie hyperbolique des plans, si l'on suppose les transformations homographiques à coefficients réels, et la géométrie hyperbolique de l'espace, si l'on suppose ces transformations à coefficients complexes. D'après cela, toute transformation homographique d'une variable peut être regardée comme définissant un déplacement, daus le plan non-euclidien si elle est réelle, dans l'espace non-euclidien si elle est complexe. H. Poincaré s'est servi de cette propriété dans sa théorie des fonctions fuchsiennes.

L'importance de la théorie des groupes et du *principe de l'équivalence* est exprimée par Poincaré de la façon suivante : « Le principe de la science mathématique est toujours le même. Elle doit étudier des transformations de natures diverses, et, pour cela, elle doit rechercher ce qui demeure constant et inaltéré dans ces transformations. Partout, elle a pour but l'étude des groupes, et pour moyen la recherche des invariants. Cela n'apparaît pas dans tous les cas avec la même évidence, bien que cela soit toujours vrai. Si l'on voit du premier coup que la géométrie projective n'est autre chose que la théorie des substitutions linéaires, on n'aperçoit pas aussi vite que



la géométrie élémentaire se ramène à celle des substitutions orthogonales[1]. »

II. Application du principe de l'équivalence : La relativité de l'espace.

La relativité de l'espace résulte de ce que l'on peut transformer le groupe euclidien, à l'aide d'une transformation ponctuelle quelconque, en un groupe isomorphe.

Lorsque l'on dit que l'espace est relatif, on désigne par là des propriétés fort diverses[2]. Il est relatif en tant qu'*homogène :* si les objets qui nous entourent et notre corps lui-même étaient transportés dans une autre région de l'espace, sans que leurs distances mutuelles varient, nous ne nous en apercevrions pas, et c'est ce qui arrive en effet, puisque nous sommes entraînés par le mouvement de la Terre. Il est relatif en tant qu'*isotrope :* si l'orientation du système du monde venait à changer, nous ne nous en rendrions pas compte. Il est relatif, en tant qu'*il ne comporte pas de grandeur absolue :* si les objets étaient tous dilatés dans une même proportion et s'il en était de même de nos instruments de mesures, nous n'en aurions aucune conscience. Il est relatif, enfin, en tant qu'*amorphe*. Supposons que tous les objets soient déformés suivant une loi continue tout à fait quelconque, comme le sont leurs images dans des miroirs déformants, et qu'il en soit de même de nos instruments de mesure : nous ne pourrions nous en apercevoir. Ainsi, les locutions *position absolue*, *orientation absolue*, *grandeur ou distance absolue*, *forme absolue*, n'ont aucun sens, pas plus que, en la physique contemporaine, les termes de

[1] *Notice sur Halphen*, ap. *Œuvres de G.-H. Halphen*, publiées par les soins de C. Jordan, E. Picard et H. Poincaré, Paris, 1916, t. I, p. XXXIV-XXXV.

[2] Cf. *V. S.*, p. 63-65; *S. M.*, liv. II, chap. I; *D. P.*, p. 37-38.

mouvement absolu, *vitesse absolue*, *accélération absolue*.

Il convient de revenir sur la dernière espèce de relativité géométrique, celle de la forme. Il n'y a pas de forme absolue. Un corps n'a de forme que relativement à un autre. Pour bien faire entendre ce dont il s'agit, imaginons deux mondes, tels que l'on puisse passer de l'un dans l'autre par une transformation ponctuelle quelconque. A chaque point de l'un correspondra un point et un seul de l'autre, et les coordonnées d'un point du second seront des fonctions continues, du reste tout à fait arbitraires, des coordonnées du point correspondant du premier. Supposons qu'à chaque objet du premier univers corresponde un objet de même nature du second : les objets du second seront les transformés du premier, suivant la transformation admise. Si nous passons du premier monde dans le second, en subissant la même déformation que celle des objets, nous ne nous rendrons compte d'aucun changement survenu ; notre géométrie restera la même. Que si, de retour dans notre patrie d'origine, il nous est donné de contempler l'univers que nous venons de quitter, notre stupéfaction sera grande : à nos droites correspondront des lignes révélant de capricieuses inégalités ; à nos plans, des surfaces singulièrement bosselées : à nos cercles, des courbes tordues ; aux déplacements sans déformation de nos solides, des transformations altérant sensiblement la forme des mobiles correspondants : ce monde nous paraîtra la caricature du nôtre. Et, pourtant, ces deux mondes, intuitivement si dissemblables, seront géométriquement isomorphes : à toute congruence et à tout déplacement de l'un correspondront une congruence et un déplacement de l'autre suivant les mêmes lois, et les habitants de l'un et de l'autre monde construiront la même géométrie. Qu'est-ce à dire, sinon que *les transformations ponctuelles transforment le groupe euclidien en groupes*

isomorphes :c'est en cela que consiste la relativité de l'espace.

On peut exprimer analytiquement ces résultats de la façon suivante. Soient trois nombres α, β, γ, que nous appellerons coordonnées provisoires d'un point. Prenons trois fonctions de α, β, γ, à savoir x, y, z, que nous nommerons coordonnées définitives du même point. Soient deux points $(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ et d la *distance euclidienne* de ces deux points donnée par l'expression :

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Nommons *plan*, l'ensemble des points dont les coordonnées x, y, z, vérifient une équation du premier degré ; *droite*, l'intersection de deux plans ; *déplacements*, les transformations n'altérant pas la distance. Avec ces définitions, la géométrie ordinaire s'établira sans peine et les axiomes d'Euclide seront vrais. Mais les fonctions x, y, z, restent, dans ce qui précède, indéterminées. En changeant ces fonctions, on a d'autres objets vérifiant les mêmes axiomes. *Les axiomes de la géométrie ne caractérisent donc pas univoquement les objets auxquels on a coutume de les rapporter ; ils s'appliquent également à une infinité d'objets que l'on peut obtenir, en partant des premiers, par une transformation ponctuelle quelconque.* Les symboles qui figurent dans leur énoncé ne sont donc pas nécessairement liés à l'intuition habituelle que nous avons de la droite, du plan, etc., puisque les propriétés formelles de ces symboles s'accordent également avec l'intuition de n'importe quels pseudo-droite, pseudo-plan, pseudo-déplacement, obtenus à l'aide d'une déformation continue quelconque. On peut dire, par suite, que nous n'avons pas plus l'intuition de la droite en soi, du plan en soi, d'un déplacement en soi, que nous n'avons celle de la position, de la grandeur ou de la distance absolue de deux objets. *Ces mots, pris absolument,*

sont dénués de sens. Lorsqu'on convient de leur en accorder un, à l'aide des axiomes métriques d'Euclide qui sont relatifs à la droite, au plan, à l'égalité des figures, etc., c'est en réalité toute une famille de lignes, de surfaces, de figures que l'on se trouve avoir caractérisée équivoquement. Ces lignes, ces surfaces, ces figures forment une même famille, en ce sens qu'on peut les obtenir, les unes à partir des autres, au moyen d'une transformation ponctuelle quelconque.

III. Application du principe de l'équivalence : les interprétations euclidiennes des géométries non-euclidiennes.

En partant du *principe d'équivalence*, on peut établir trois interprétations euclidiennes différentes des métriques non-euclidiennes. Les deux premières consistent à définir, en partant de la géométrie ordinaire, certains groupes de transformations (groupe conservant les angles et une sphère fixe, groupe conservant les droites et une sphère fixe, etc.), et à montrer que, grâce à un changement de vocabulaire approprié, ces groupes sont isomorphes aux groupes non-euclidiens.

Première interprétation. — Commençons par étudier le groupe des transformations qui conservent les angles et une sphère fixe. Ces transformations sont des produits d'inversions, si bien qu'il nous faut d'abord définir ce que c'est qu'une inversion.

On nomme inverse d'un point M, le point M′ lui correspondant sur la ligne MOM′, O étant un point fixe appelé pôle d'inversion, tel que l'on ait la relation $OM.OM' = K$, la constante K étant la puissance d'inversion. On démontre que l'inversion, appliquée à tous les points d'une figure, conserve les angles et transforme la ligne droite en un cercle passant par le pôle d'inversion;

un cercle ne passant pas par O, en un cercle homothétique au précédent; un plan, en une sphère passant par le point O; une sphère ne passant pas par O, en une sphère homothétique à la précédente.

Considérons[1] une sphère Σ (réelle ou imaginaire), ayant pour centre O et pour rayon $\sqrt{K}$, appelée *sphère fondamentale* ou *Absolu*. Toute sphère et tout plan, passant par deux points inverses M et M′, coupent orthogonalement cette sphère fondamentale. Appelons cercle Ω et sphère Ω, tout cercle et toute sphère coupant ainsi Σ à angle droit.

Une inversion de pôle O et de puissance R^2, R désignant le rayon de l'*Absolu*, change la sphère fondamentale en elle-même. Il en est de même d'un produit quelconque d'inversions semblables, qui, pour cette raison, forment un groupe, que nous appellerons S. Ce groupe n'est pas continu; il n'est pas engendré par des transformations infinitésimales, une inversion ne pouvant pas changer tout point de l'espace en un point infiniment voisin. Mais ce groupe possède un sous-groupe qui jouit de cette propriété. C'est le groupe formé par un nombre pair d'inversions : deux inversions, ayant leurs pôles très voisins et leurs puissances peu différentes, changent tout point de l'espace en un point aussi voisin qu'on le veut. Appelons T ce sous-groupe du groupe S. On peut démontrer alors que le groupe S, formé d'un nombre quelconque d'inversions, est isomorphe au groupe métrique de Lobatchefski et que le sous-groupe T est isomorphe au groupe des déplacements non-euclidiens.

Appelons, à cet effet, *espace*, l'ensemble des points intérieurs à Σ; *droite*, la partie d'un cercle Ω intérieure à Σ; *plan*, la partie d'une sphère Ω intérieure à Σ; *dis-*

[1] Cf. J. Richard, *Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne*, Paris, 1900; premier supplément, p. 1-13.

tance de deux points A et B, situés sur le cercle Ω qui coupe Σ orthogonalement en P et Q, le logarithme du rapport anharmonique (ABQP); *déplacement*, un nombre pair d'inversions; *angle*, un angle ordinaire. Grâce à ces définitions, on obtient une série de théorèmes qui ne sont autres que ceux de la géométrie de Lobatchefski, et l'on peut traduire chaque théorème non-euclidien en un théorème euclidien correspondant, au moyen du dictionnaire suivant :

Espace. . . . . Domaine intérieur de la sphère fondamentale.

Droite . . . . Portion d'un cercle, orthogonal à la sphère fondamentale, située dans le domaine intérieur de la sphère.

Plan . . . . Portion d'une sphère, orthogonale à la sphère fondamentale, située dans le domaine intérieur de la sphère.

Distance de deux points. Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections de la sphère fondamentale avec le cercle, passant par les deux points, qui la coupe orthogonalement.

Déplacement. . . . . . . Nombre pair d'inversions qui transforment la sphère fondamentale en elle-même.

Par là se trouve définitivement écarté le risque d'une contradiction dans la géométrie non-euclidienne. Puisque tout théorème non-euclidien correspond à un théorème euclidien, toute contradiction dans la géométrie du savant russe se traduirait immédiatement par une contradiction dans la géométrie du savant grec, et, par voie de conséquence, dans les principes de l'analyse auxquels l'artifice de Descartes permet de ramener les axiomes de la géométrie ordinaire.

Dans le cas où la sphère fondamentale est imaginaire, on obtient un nouveau groupe de produits d'inversions

qui correspond à la géométrie de Riemann. Une droite riemannienne a pour image un cercle dont le plan passe par l'origine O, et tel que la puissance de l'origine par rapport à ce cercle soit $-R^2$, R étant le rayon de la sphère fondamentale ; un plan riemannien a pour image une sphère, telle que la puissance de l'origine par rapport à cette sphère soit $-R^2$.

La géométrie que l'on obtient avec ces droites et ces plans semble, de prime abord, peu différente de celle de Lobatchefski : dans les formules, le carré du rayon de la sphère Σ est simplement changé de signe. Il existe pourtant, entre les deux géométries, une différence capitale. La sphère fondamentale, devenue imaginaire, ne partage plus l'espace en deux régions : il n'y a plus lieu de distinguer un domaine intérieur et un domaine extérieur. Un plan n'est plus une portion de sphère, mais une sphère entière. Un plan et une droite se coupent alors en deux *points antipodes*, P et Q, qui sont en ligne droite avec l'origine O, et le produit des rayons vecteurs OP et OQ est égal à $-R^2$. Mais on peut trouver une infinité de droites passant par les deux points opposés P et Q. Le sixième postulat d'Euclide, *deux points déterminent une droite et une seule*, cesse d'être vrai.

L'interprétation précédente a été développée par Poincaré dans une note du *Traité de géométrie* de Rouché et Comberousse[1]. Elle lui a servi à imaginer un monde non-euclidien, c'est-à-dire à construire l'image d'un univers dont les habitants choisiraient spontanément la géométrie non-euclidienne, au lieu de celle du savant grec.

Deuxième interprétation. — La première interpréta-

[1] Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie*, 7e édit., 1900, t. III, note 2, p. 581-587.

tion repose sur l'isomorphisme des groupes métriques non-euclidiens et du groupe, étudié à l'aide de la géométrie ordinaire, des transformations qui conservent les angles et une sphère fondamentale, réelle ou imaginaire. Liouville[1] a établi que les seules transformations qui conservent les angles dans l'espace sont celles qui conservent les sphères ou les changent en plans : ce sont les inversions. Il n'existe donc aucun autre groupe, isomorphe au groupe non-euclidien, conservant les angles. Mais on peut se proposer d'en découvrir d'autres ne conservant pas les angles, mais conservant par exemple les droites.

Une transformation, étudiée par Cayley, permet d'obtenir de tels groupes. Soit O, le centre de la sphère Σ, R son rayon, M un point intérieur à Σ, M′ le point situé sur OM et tel que $OM \times OM' = R^2$; soit P le milieu de MM′, et m un point sur OP tel que $Om \times OP = R^2$: à tout point M correspondra un point transformé m. Cette transformation, assez compliquée, change les cercles orthogonaux à Σ en droites euclidiennes, les sphères orthogonales à Σ en plans euclidiens. En appliquant cette transformation aux groupes des inversions qui conservent les angles et une sphère fixe, réelle ou imaginaire, on obtient deux groupes isomorphes aux premiers, qui conservent les droites et les plans, mais non les angles. Les transformations de ces groupes ne sont autres que les homographies, étudiées par Cayley et Klein, qui conservent une quadrique fondamentale, dans le cas où cette quadrique est une sphère, réelle ou imaginaire.

Si la sphère fondamentale est réelle, les théorèmes de la géométrie de Lobatchefski pourront se traduire en théorèmes euclidiens, au moyen du dictionnaire suivant :

[1] Cf. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris, 1850, note 7, p. 609.

Espace.	Domaine des points intérieurs à la sphère fondamentale.
Droite	Corde de la sphère.
Plan	Portion d'un plan sécant intérieure à la sphère.
Distance de deux points.	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections de la sphère fondamentale avec la droite qui passe par ces deux points.

Si la sphère fondamentale est imaginaire, on obtient un nouveau groupe, isomorphe au groupe riemannien. Dans ce cas, la transformation de Cayley implique que deux points antipodes aient le même transformé. En effet, soit M un point. M′ son antipode, P le milieu de MM′ ; au point M on fait correspondre le point m tel que $Om \times OP = -R^2$. A deux points opposés correspond alors le même point m. Dans cette nouvelle manière d'interpréter la géométrie de Riemann, un plan et une droite ne peuvent avoir qu'un point commun : le sixième postulat d'Euclide, sur *la détermination univoque d'une droite par deux points*, est vrai sans restriction. Comment se fait-il alors que la somme des angles d'un triangle soit supérieure à deux droits ? C'est que l'on abandonne un autre axiome à la place du sixième postulat d'Euclide, à savoir : *un plan sépare l'espace en deux régions, si bien qu'une droite ne peut passer de l'une à l'autre sans le traverser*. La géométrie de Riemann, ainsi transformée, n'est plus alors la géométrie sphérique, c'est la géométrie de la gerbe. Appelons *faux point* une droite passant par O, *fausse droite* un plan passant par O. En vertu du principe de dualité, deux *faux points* déterminent univoquement une *fausse droite ;* mais, si l'on considère deux *faux points* et une *fausse droite*, on peut, dans tous les cas, déplacer l'un des points pour le faire coïncider avec l'autre, sans traverser la *fausse droite*. En effet, soient deux droites AOB, COD passant par O (ce sont deux *faux points)* et

un plan P passant par O (c'est une *fausse droite)*; OA et OC, par exemple; seront d'un même côté de P, OB et OD du côté opposé : on pourra faire coïncider la première droite avec la seconde sans traverser P, en amenant OA sur OC et OB sur OD. L'axiome de la division de l'espace en deux régions par un plan cesse ainsi d'être vérifié.

Il est facile également de constater que, dans l'interprétation de la géométrie elliptique dans celle de la gerbe, comme dans l'interprétation de cette géométrie dans celle de la sphère, la distance de deux points ne dépasse jamais une certaine limite : il n'y a pas de points à l'infini.

L'interprétation précédente a été exposée par Poincaré dans la note qu'il a mise au *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse[1].

Troisième interprétation *(interprétation de Poincaré)*. — Dans les deux dernières interprétations, on considère les points intérieurs à une sphère absolue. Mais on peut trouver une infinité de transformations changeant la sphère fondamentale dans l'espace entier. Supposons que Σ soit réelle et prenons un point sur sa surface. On pourra la soumettre à une inversion ayant pour pôle ce point, qui transformera Σ en un plan P, et les points intérieurs de Σ dans l'un des côtés du plan P. Le plan P étant, par exemple, le plan XOY, et z étant la cote d'un point, le domaine intérieur de Σ sera transformé dans l'ensemble des points pour lesquels z est positif. Si l'on pose alors

$$Z = \log z,$$

quand z varie de O à l'infini, Z variera de $-\infty$ à $+\infty$, et le point de cote Z correspondra au point de cote z se projetant au même point. Cette transformation fait correspondre, à tous les points de l'espace lobatchefskien contenus dans la sphère fondamentale, les points du demi-

[1] *Op. laud.*, p. 588-589.

espace euclidien situé au-dessus du plan P. Au plan et à la droite du premier espace correspondront une sphère et un cercle coupant orthogonalement le plan fondamental ; à la sphère, au cercle et à l'angle lobatchefskiens, une sphère, un cercle et un angle euclidiens ; à la distance lobatchefskienne de deux points, le logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement. Les propriétés de l'espace lobatchefskien se transformeront en propriétés de l'espace euclidien, et réciproquement. On peut trouver, du reste, une infinité de groupes non-euclidiens de cette espèce isomorphes entre eux, le point de la sphère Σ, pris pour pôle, étant indéterminé et, par suite, le plan fondamental étant un plan quelconque. Cette nouvelle image de la géométrie hyperbolique est celle utilisée par Poincaré dans ses recherches sur les groupes fuschiens, où il déduit la génération des groupes kleinéens de la division d'une demi-espace en polyèdres limités par des surfaces sphériques orthogonales au plan limite. Sa découverte eut lieu dans les conditions suivantes. Il s'agissait de raisonner sur un réseau de triangles curviliques, formés d'arcs de cercle coupant orthogonalement un cercle fondamental donné. Poincaré s'aperçut que les propriétés des arcs ainsi définis sont justement celles que la géométrie de Lobatchefski attribue aux droites hyperboliques. Cette découverte était d'autant plus suggestive, qu'elle renversait le rôle joué jusqu'alors par la géométrie euclidienne à l'égard de la géométrie non-euclidienne. Au lieu de se servir de la première pour donner un sens aux théorèmes de la seconde, ce sont les théorèmes de la seconde qui servent à triompher des difficultés rencontrées dans un problème de géométrie ordinaire. Revenant plus tard sur sa découverte, Poincaré l'apprécie en ces termes : « Les théorèmes de la géométrie de Lobatchefski sont

aussi vrais que ceux de la géométrie d'Euclide, à la condition qu'on les interprète comme ils doivent l'être. Ainsi, par exemple, ces théorèmes ne sont pas vrais de la ligne droite telle que nous la concevons, mais ils le deviennent si, partout où Lobatchefski dit « une droite », nous disons « un cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental ». Je me trouvais donc en présence de toute une théorie, imaginée, il est vrai, dans un but métaphysique, mais dont chaque proposition, convenablement interprétée, me fournissait un théorème applicable à la géométrie ordinaire [1] ».

C'est à cette interprétation, à laquelle mérite d'être rattaché le nom de Poincaré, que se réfère le passage si souvent cité, et si arbitrairement critiqué [2], de *Science et Hypothèse :*

« Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent, dans les dictionnaires ordinaires, les mots de deux langues dont la signification est la même :

Espace	Portion de l'espace situé au-dessus du plan fondamental.
Plan	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental.
Droite	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental.
Sphère	Sphère.
Cercle	Cercle.
Angle	Angle.

[1] H. Poincaré, *Notice sur ses travaux scientifiques*, mise à jour en 1902 (cité par Pierre Boutroux, *Henri Poincaré : l'Œuvre philosophique*, ap. *Revue du Mois*, 10 février 1913, p. 158-159).

[2] Milhaud, *les Conditions et les limites de la certitude logique*, p. 156; comp. Lechalas, *Etude sur l'espace et le temps*, 2e éd., Paris, 1909, p. 81 et suiv.

Distance de deux points. Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement, etc., etc.

« Prenons ensuite les théorèmes de Lobatchefski et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire, comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire*... Ainsi, quelque loin que l'on pousse les conséquences des hypothèses de Lobatchefski, on ne sera jamais conduit à une contradiction[1]. »

Il résulte du principe de l'équivalence que les groupes métriques non-euclidiens de Sophus Lie ; les groupes des homographies, qui conservent une quadrique fondamentale réelle ou imaginaire, de Cayley et de Klein; les groupes des transformations qui conservent les angles et une sphère fixe, réelle ou imaginaire *(première interprétation);* les groupes, transformés des précédents par la transformation de Cayley, qui conservent les droites et une sphère fixe, réelle ou imaginaire *(deuxième interprétation);* les groupes, transformés des avant-derniers par inversion, qui conservent un plan fondamental *(troisième interprétation*, dite de Poincaré), *sont isomorphes.* Ils représentent diverses interprétations possibles des métriques de Lobatchefski et de Riemann, et permettent d'établir définitivement leur parfaite cohérence logique.

Ces deux métriques, jointes à celle d'Euclide, sont, du reste, les seules compatibles avec la libre mobilité des figures. C'est ce que l'on démontre, soit en partant de l'expression différentielle de l'élément linéaire, comme Riemann ; soit de l'expression de la distance finie de deux points, comme Tilly ; soit des mouvements qui

[1] S. *H.*, p. 57-58.

laissent invariable la distance des couples de points des corps solides, comme Helmholtz ; soit des homographies qui conservent une certaine figure invariante, en même temps que la distance des points d'un solide en mouvement, comme Klein.

IV. Conclusion.

Des considérations précédentes, on peut déduire les conséquences suivantes :

1. La géométrie métrique repose sur la congruence des figures. Deux figures sont dites égales lorsqu'elles sont superposables. Pour les superposer, il faut les déplacer sans les déformer dans l'espace, jusqu'à ce qu'elles coïncident. Mais, qu'est-ce qu'un déplacement sans déformation ? On est tenté de répondre que c'est le mouvement d'une figure tel que la distance de tous les couples de points demeure invariable. Mais, qu'est-ce que la distance de deux points, et quand dirons-nous qu'elle reste invariable, c'est-à-dire que deux distances sont égales ? Si l'on répond que la distance reste invariable, lorsque la figure ne se déforme pas dans les déplacements qu'elle subit, le cercle vicieux est manifeste[1]. Il faut donc prendre comme notion indéfinissable de la géométrie, soit la notion de *distance* comme Riemann, Tilly ou Klein, soit celle de *déplacement* comme Helmholtz et Sophus Lie. Les travaux de ces géomètres montrent alors que ces expressions : *égalité de deux distances*, *déplacements sans changement de forme*, et, par suite, les notions de *droites* et de *plans* n'ont pas de signification univoque. On peut leur faire correspondre trois familles distinctes de lignes, de surfaces et de solides.

[1] *S. H.*, p. 60.

Dès lors, appeler *droites*, *plans*, *solides*, les figures qui correspondent à la définition euclidienne de l'égalité de deux distances, plutôt que celles qui correspondent à la définition de Lobatchefski ou de Riemann, c'est, au point de vue théorique, l'affaire d'une *convention nominale*. Au point de vue pratique, c'est l'affaire d'une *convention instrumentale*, puisque c'est élire une certaine métrique et, partant, choisir un certain type d'instruments pour mesurer l'espace. Aussi Poincaré a-t-il pu écrire justement : « L'égalité ou l'inégalité de deux distances sont des mots qui n'ont aucun sens par eux-mêmes ; c'est précisément pourquoi je suis obligé d'avoir recours à une *convention* pour leur en donner un. Je conviens de regarder comme égales celles qu'une certaine méthode de mensuration me donne comme telles ; j'aurais pu faire une convention différente[1] » ; et ailleurs : « Le mot « conserver sa forme » n'a aucun sens. Mais je lui en donne un en *convenant* de dire que certains corps conservent leur forme. Ces corps, ainsi choisis, peuvent alors servir d'instruments de mesure. Mais, si je dis que ces corps conservent leur forme, c'est parce que je le veux bien et non parce que l'expérience m'y oblige[2]. »

2. Les trois métriques sont, au point de vue logique, également cohérentes. Toute contradiction chez l'une entraînerait immanquablement une contradiction dans les deux autres. C'est ce qui résulte de leur équivalence, qu'il faut entendre en ce sens : tout théorème de l'une peut se traduire dans les deux autres. Les théorèmes de Lobatchefski sur les droites, les triangles, les cercles hyperboliques sont des théorèmes de géométrie euclidienne s'appliquant à des figures autres et plus compliquées que les droites, les triangles, les cercles ordi-

[1] *Sur les principes de la Géométrie*, *R. M. M.*, janvier 1900, p. 80.
[2] *Ibid.*, p. 85.

naires, et réciproquement. Au point de vue théorique, le choix d'une des trois métriques n'est qu'une affaire de langage, au même titre que le choix de la langue française ou de la langue anglaise[1]. Au lieu de dire, en langage euclidien : « La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits », on peut dire en langage lobatchefskien : « La somme des angles d'un triangle décrit sur une horisphère, ayant pour côtés trois segments d'horicycles, est égale à deux droits » ; au lieu de dire, en langage lobatchefskien : « La somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits », on peut dire en langage euclidien : « La somme des angles d'un triangle curviligne, ayant pour côtés des arcs de cercle qui, prolongés, iraient couper orthogonalement un plan fondamental, est plus petite que deux droits. » Adopter une de ces façons de s'exprimer est l'affaire d'un libre décret, tout comme le choix d'un système de coordonnées, d'un système métrique, d'une échelle de graduation. Déclarer qu'un fait empirique pourrait s'exprimer dans la géométrie d'Euclide et non dans celle de Lobatchefski est une assertion aussi ridicule que cette autre : « Y a-t-il des longueurs que l'on peut exprimer en mètres et centimètres, mais que l'on ne saurait mesurer en toises, pieds et pouces, de sorte que l'expérience, en constatant l'existence de ces longeurs, contredirait directement cette hypothèse qu'il y a des toises partagées en 6 pieds[2]. » On ne peut se décider, théoriquement, en faveur d'une métrique que pour des raisons de simplicité mathématique.

3. Les trois métriques sont, théoriquement, également utilisables dans les sciences physiques. On peut construire une dynamique, une astronomie, une physique

[1] Cf. V. S., p. 244-245.
[2] *S. H.*, p. 93-94.

non-euclidiennes, qui ne différeront de la dynamique, de l'astronomie et de la physique ordinaires que par le langage, comme un texte anglais diffère d'un texte français. « Il est évident, écrit Poincaré, que si on abandonnait la géométrie d'Euclide pour celle de Lobatchefski, on serait obligé de modifier l'énoncé de toutes les lois de la dynamique. De même, l'énoncé de ces lois n'est pas le même, selon que l'on se sert de la langue anglaise ou de la langue française[1]. »

[1] *Sur les principes de la Géométrie*, *R. M. M.*, janvier 1900, p. 79.

DEUXIÈME PARTIE

LA THÉORIE CONVENTIONALISTE DES AXIOMES GÉOMÉTRIQUES

CHAPITRE V

LA THÉORIE DE LA CONVENTION

I. Origines et exposé de la théorie.

La théorie de la convention d'Henri Poincaré est la conséquence nécessaire des prolégomènes logiques et mathématiques qui ont précédé.

Cette théorie consiste en ceci : les axiomes de la géométrie ne sont ni des *jugements empiriques*, comme le soutenaient les premiers pangéomètres, ni des *jugements analytiques*, comme le croyaient Leibniz et Taine, ni des *jugements synthétiques a priori*, comme l'enseignaient les Kantiens ; ce sont des *conventions*. Ces conventions ne sont pas arbitraires : parmi toutes les conventions possibles, nous choisissons celles que l'expérience nous révèle comme étant les plus *commodes*.

Il semble que Poincaré soit parvenu à cette théorie de très bonne heure, à la suite de la célèbre utilisation qu'il fit des géométries non-euclidiennes au cours de ses recherches sur les fonctions fuchsiennes, pour résoudre

un problème de géométrie ordinaire. Dès 1887, il apparaît en pleine possession de sa pensée, à laquelle il donne l'expression suivante dans une communication faite à la *Société mathématique de France* :

« On peut se demander maintenant ce que sont ces hypothèses (qui sont à la base de la géométrie). Sont-elles des faits expérimentaux, des jugements analytiques ou synthétiques *a priori ?* Nous devons répondre négativement à ces trois questions. Si ces hypothèses étaient des faits expérimentaux, la géométrie serait soumise à une incessante revision, ce ne serait pas une science exacte ; si elles étaient des jugements synthétiques *a priori*, ou à plus forte raison des jugements analytiques, il serait impossible de s'y soustraire et de rien fonder sur leur négation...

« Que devons-nous penser [dès lors] des prémisses de la géométrie ? En quel sens peut-on, par exemple, dire que le postulat d'Euclide est vrai ?

« D'après ce que nous venons de voir, la géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et en ce sens, on pourrait dire que la vérité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchefski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe.

« Nous avons choisi, parmi tous les groupes possibles, un groupe particulier pour y rapporter les phénomènes physiques, comme nous choisissons trois axes de coordonnées, pour y rapporter une figure géométrique.

« Maintenant, qu'est-ce qui a déterminé ce choix ? C'est d'abord la simplicité du groupe choisi ; mais il y a une autre raison : il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle solides, et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe choisi.

« Ainsi les hypothèses fondamentales de la géométrie

ne sont pas des faits expérimentaux ; c'est cependant l'observation des phénomènes physiques qui les fait choisir parmi toutes les hypothèses possibles.

« D'autre part, le groupe choisi est seulement plus commode que les autres, et l'on ne peut pas plus dire que la géométrie euclidienne est vraie et la géométrie de Lobatchefski fausse, qu'on ne pourrait dire que les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires sont fausses. »

Quatre ans plus tard, Poincaré reprit la même thèse dans un article de la *Revue générale des Sciences*[1] :

« *Les axiomes géometriques ne sont donc ni des jugements synthétiques* a priori *ni des faits expérimentaux.*

« Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement* vrais, quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

« En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées.*

« Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?

« Elle n'a aucun sens.

« Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode*[2]. »

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1886-1887, 2 novembre 1887, p. 214-215.

[2] *Les Géométries non-euclidiennes*, ap. *Revue générale des Sciences*, 15 décembre 1891, p. 769-774. Cet article est reproduit dans *S. H.*, chap. II.

Poincaré n'a explicitement justifié sa théorie qu'au sujet de deux principes : le postulat d'Euclide et l'axiome des trois dimensions. Même en restreignant la discussion à ces deux principes, il appert que le conventionalisme de Poincaré appelle d'indispensables commentaires. Il faut avant tout définir la notion de convention et distinguer diverses sortes de dimensions. Il faut, en second lieu, apporter certains tempéraments aux affirmations de Poincaré, en montrant qu'une même énonciation peut, suivant le point de vue sous lequel on l'examine, apparaître, tour à tour, comme une simple convention, comme une fonction propositionnelle susceptible de devenir une proposition moyennant certaines valeurs attribuées aux variables qui figurent, et, enfin, comme une proposition assertoriquement vraie.

II. La notion de convention.

La notion de convention paraît obscure à plus d'un logicien, et cette obscurité est la cause de la défaveur qu'encourt, auprès d'eux, la théorie de Poincaré. C'est ainsi que Couturat déclare : « En général, il faut se défier des *conventions* en mathématiques : elles recouvrent trop souvent des sophismes ou, tout au moins, des pétitions de principe. Il n'y a rien de conventionnel en mathématiques (pas plus que dans aucune science logique et rigoureuse), en dehors des définitions ; et encore, la part de la convention s'y réduit-elle au choix du nom (qui n'est arbitraire qu'en théorie, mais qui pratiquement est le plus souvent dicté et presque imposé par l'usage ou par l'analogie). Aussi le mot de *convention* devrait-il être rayé du langage mathématique, dans l'intérêt de la rigueur logique, et nous dirions presque de la loyauté scientifique. Ce qu'on appelle *convention* est, ou bien une définition ou une imposition de nom, ou bien une hypothèse ou un pos-

tulat. Dans les deux cas, il est plus correct et plus précis d'employer ces dernières expressions. En dehors de ces deux cas, une convention ne peut être qu'un moyen d'éluder, soit une explication, soit une démonstration, c'est-à-dire un expédient sophistique ou paresseux[1]. »

Nonobstant l'avis de Couturat, on peut conserver le terme de *convention*, qui jouit d'une longue prescription, à condition, toutefois, de le préciser.

Une convention est une énonciation qui exprime l'accord librement intervenu entre plusieurs personnes (et, plus improprement, entre un individu et lui-même) au sujet d'un objet spéculatif ou pratique. Au point de vue psychologique, une convention diffère d'une proposition en ce qu'elle n'est pas *un jugement qui s'impose à l'assentiment de notre entendement pour des motifs rationnels propres à déterminer une certitude apodictique ou assertorique;* mais en ce qu'elle est *un décret*, *issu d'une libre décision de notre esprit*, *qui se propose à l'acquiescement de notre volonté*, *toujours maîtresse de l'accepter ou de le rejeter.* Au point de vue logique, une convention diffère d'une proposition en ce qu'elle est une énonciation *qui n'est pas susceptible d'être vraie ou fausse*, mais dont on peut seulement dire qu'elle est plus ou moins indispensable et commode.

Les conventions possèdent une modalité, tout comme les propositions. Une convention est *nécessaire*, si elle est la condition *sine qua non* de l'étude que l'on a en vue : c'est une convention nécessaire que celle de respecter le principe de contradiction, lorsqu'on aborde une discussion. Une convention est *gratuite*, encore qu'elle puisse être fort utile au point de vue heuristique, si elle n'est pas indispensable : c'est ainsi qu'en électricité, il est gratuit d'adopter l'hypothèse des deux fluides électriques, ou

[1] *Les définitions mathématiques*, ap. *l'Enseignement mathématique*, 1905, p. 37-38.

d'un fluide unique, ou de se passer de toute hypothèse sur la nature de l'électricité. Une convention peut être dite *facultative*, si, *tout en étant indispensable pour l'étude que l'on a en vue*, elle est *choisie* parmi plusieurs, et parfois même une infinité, d'autres possibles. Ainsi, pour faire de la physique, il faut adopter une métrique et un système métrique ; mais le choix d'une métrique et d'un système métrique déterminés est facultatif, puisqu'il y a trois métriques et une infinité de systèmes métriques possibles. Les *conventions facultatives* sont les seules que Poincaré ait en vue. On les reconnaît infailliblement à ce signe : *on peut toujours remplacer une convention de cette sorte par une convention contraire, sans que cela entraîne autre chose qu'une simple modification du langage scientifique ;* au lieu qu'on ne peut remplacer une proposition par une autre, non équivalente ou conséquente, sans modifier le contenu même de la science. Il résulte de là que, dans les sciences, *on peut toujours passer d'un système de conventions facultatives à un autre, au moyen d'une simple traduction*. Les conventions fixent le langage de la science et règlent les conditions de ses applications pratiques : elles se rapportent à la *forme* de la science et à son usage ; les propositions déterminent le contenu de la science : elles en constituent la *matière*.

Le choix d'une convention facultative est *spontané*, s'il résulte d'un accord tacite ; il est *réfléchi*, s'il est le fruit d'une discussion. Il est *arbitraire*, si aucune raison déterminante ne le recommande ; il est *justifié*, s'il est motivé par des raisons dites de convenance, d'opportunisme et de commodité. De même qu'il existe des types de vérité fort divers, et des critères fort distincts pour les reconnaître, il existe des types variés de conventions et des raisons de convenance fort différentes pour les justifier.

1° Un premier type de conventions comprend les *conventions d'écriture*. Le choix d'un système de symboles

non définis au début d'une théorie déductive est une convention de cette sorte. La principale raison de convenance à invoquer est l'univocité des symboles ou des termes, c'est-à-dire qu'à chaque terme ou à chaque symbole ne doit correspondre qu'une seule idée.

2° Il y a des *conventions de langage*, ou *conventions nominales*, qui sont des *définitions*. Elles consistent, soit à déterminer le sens d'un mot en fonction d'un petit nombre de notions premières *(définitions nominales)*, soit à caractériser équivoquement un système de notions premières au moyen d'un système de postulats *(définitions par postulats)*.

3° Chaque fois que l'on interprète un système de notions et de propositions premières, on énonce une *proposition de fait* : on affirme qu'entre tels objets sensibles et les symboles non définis de la théorie, il existe des relations qui jouissent des mêmes propriétés formelles. Il arrive souvent que, pour un même système, on connaisse plusieurs interprétations possibles des mêmes notions premières. Elire une de ces interprétations, parmi toutes les autres possibles, est alors l'affaire d'une *convention d'interprétation*.

4° Il y a enfin les *conventions instrumentales*, qui se rapportent au choix des différentes techniques propres à appliquer une forme à une matière.

III. La nature du postulat d'Euclide.

Examinons, à la lumière des considérations précédentes, la nature du postulat d'Euclide.

A. — Si l'on procède suivant la *méthode axiomatique* d'Hilbert, en traitant les notions premières comme des symboles non définis, le postulat d'Euclide n'est pas une proposition. *C'est une fonction propositionnelle qui n'est*

ni vraie ni fausse, mais qui est susceptible de devenir telle, moyennant une certaine interprétation des symboles premiers de la théorie.

B. — Si l'on considère les lignes empiriques qui assument dans la nature les fonctions physiques suivantes : d'être le plus court chemin d'un point à un autre, d'être l'axe de rotation des corps solides, d'être la trajectoire des rayons lumineux dans un milieu homogène, l'expérience montre qu'elles jouissent approximativement des mêmes propriétés que les droites euclidiennes. Si l'on fait correspondre ces lignes empiriques à ces droites idéales ou aux symboles non définis que leur substitue Hilbert, le postulat d'Euclide se trouve énoncer une propriété empirique des rayons lumineux et des solides naturels. Il revient à ce *jugement de fait :* il existe des solides naturels tels que, si on les fait glisser le long d'une droite (mouvement de translation), chaque point décrira une droite ; ou encore, ce qui revient au même : les translations des solides naturels forment un groupe. *Le postulat d'Euclide devient alors une proposition assertorique*, *exprimant une vérité d'expérience.* Mais il n'est plus ici question de géométrie *pure*, qui, étant purement formelle, se borne à étudier certains systèmes de relations entre des termes indéterminés. Il s'agit de géométrie *appliquée*, où entrent en ligne de compte non plus seulement la cohérence logique, mais aussi la vérité matérielle.

C. — Nous avons vu que les propositions premières, plus exactement les fonctions propositionnelles qui sont à la base d'une théorie déductive, caractérisent équivoquement les symboles premiers de cette théorie, non définis nominalement. C'est ce qui conduit à dire qu'elles définissent par postulats ces symboles, en limitant le nombre de leurs interprétations possibles. A ce titre,

tous les axiomes de la géométrie (exclusion faite des postulats d'existence) sont des *conventions nominales,* ou encore, comme dit Poincaré, des *définitions déguisées*[1].

Il y a lieu de remarquer que les définitions par postulats sont incomplètes, puisqu'elles ne caractérisent pas univoquement une seule catégorie d'objets singuliers. En ce sens, ce sont des *définitions de genres*. C'est, de plus, tout un système de fonctions propositionnelles qui caractérise par postulats un système de symboles non définis nominalement. Le postulat d'Euclide n'est donc qu'*une partie de définition*. Il faut lui adjoindre les postulats 1, 2 et 6 d'Euclide pour caractériser *un certain genre de choses,* parmi lesquelles figurent la droite euclidienne et toutes les lignes qu'on en peut déduire par une transformation ponctuelle quelconque de l'Univers. Si les postulats 1, 2, 6 d'Euclide suffisaient à caractériser la droite euclidienne, le postulatum, qui en énonce une nouvelle propriété, serait un théorème démontrable. *Le postulat d'Euclide se réduit ainsi à une convention de langage qui règle l'usage du mot droite :* je conviens d'appeler *droite* la ligne qui respecte les relations énoncées dans les postulats 1, 2, 5 et 6 d'Euclide, et non, par exemple, la ligne qui ne vérifie que les postulats 1, 2 et 6. L'expérience peut bien suggérer une telle *convention nominale,* en montrant que les lignes physiques *les plus remarquables* de notre univers jouissent précisément des mêmes propriétés géométriques que les droites euclidiennes ; mais l'expérience ne peut, en aucun cas, imposer une pareille convention, car il est bien évident que nous sommes toujours libres d'appeler du nom de *droite* toute autre figure. C'est ce que Poincaré exprime en ces termes :

« Dans l'espace nous connaissons des triangles rectilignes dont la somme des angles est égale à deux droits ;

[1] *S. H.*, p. 67

mais nous connaissons également des triangles curvilignes dont la somme des angles est plus petite que deux droits. L'existence des uns n'est pas plus douteuse que celle des autres. Donner aux côtés des premiers le nom de droites, c'est adopter la géométrie euclidienne ; donner aux côtés des derniers le nom de droites, c'est adopter la géométrie non-euclidienne. De sorte que, demander quelle géométrie convient-il d'adopter, c'est demander : A quelle ligne convient-il de donner le nom de droite ?

« Il est évident que l'expérience ne peut résoudre une pareille question ; on ne demanderait pas, par exemple, à l'expérience de décider si je dois appeler une droite AB ou bien CD[1]. »

D. — Etant donnée une forme que l'on veut appliquer à une matière, un système d'équations différentielles, par exemple, où figurent certains paramètres que l'on veut interpréter physiquement, il convient, pour que cette adaptation d'une forme à une matière soit possible, de construire certains instruments de mesure. En effet, les changements du monde extérieur sont généralement qualitatifs. On peut définir à leur sujet les signes $=$, $<$, $>$, mais non le signe de l'addition $+$. Etant donnés deux corps, on peut juger sensoriellement qu'ils sont également chauds ou que l'un est plus chaud que l'autre, mais sans qu'on puisse dire de combien. Pour cela, il faudrait pouvoir considérer l'état d'intensité d'une qualité comme formé par l'addition d'états d'intensité moindre de cette même qualité, de même que l'état de grandeur d'une quantité est formé par l'addition d'états de grandeur plus petits de cette même quantité. Mais, c'est précisément ce qui n'est pas possible, ce par quoi diffère la catégorie de

[1] *V. S.*, p. 60.

la quantité de celle de la qualité. Faute de pouvoir définir le signe + au sujet des différents états d'intensité d'une qualité, on ne peut discourir d'emblée des qualités dans le langage de l'algèbre.

Si l'on est parvenu à le faire, c'est grâce à cette propriété, imprévisible *a priori*, que tout changement qualitatif est lié au changement de grandeur d'un effet quantitatif concomitant. Cet effet concomitant se ramène toujours à une variation de forme géométrique ou à un déplacement sans changement de forme. Il est possible alors de repérer les différents degrés d'intensité du changement qualitatif à l'aide des divers états de grandeur du phénomène quantitatif qui l'accompagne. C'est ainsi qu'une variation de température amène une dilatation du corps qui la subit. On part de là pour faire les conventions suivantes : 1° on choisit une substance, telle que le mercure ou l'alcool, emprisonnée dans un tube de verre, et on convient de repérer les variations de température des corps par les variations linéaires de la substance ainsi choisie, lorsqu'elle est mise par contact en équilibre thermique avec eux ; 2° on choisit une certaine échelle de graduation qui permet de définir ce qu'il faut entendre par degré de température. On peut dès lors apprécier, avec l'approximation que comportent la lecture du thermomètre et ses procédés de construction, si deux corps sont également chauds, ou de combien l'un est plus chaud que l'autre. Le choix d'un thermomètre, qui permet d'appliquer les équations de la thermodynamique aux variations thermiques des corps, implique donc au moins une double *convention instrumentale :* le choix d'une substance de repère, le choix d'une échelle de graduation. Suivant les cas, ces conventions peuvent varier ; il peut être plus pratique, suivant les cas, d'employer un thermomètre à alcool ou à mercure, et de le graduer en thermomètre centigrade, Fahrenheit ou Réaumur.

Les instruments de mesure, qui permettent d'appliquer à l'étude des phénomènes de la nature le langage de la mathématique universelle, reviennent toujours à faire correspondre aux variations qualitatives des phénomènes, soit les variations de forme géométrique d'un corps unique comme la dilatation linéaire du mercure, la déformation du ressort d'un dynamomètre; soit les variations de la distance relative de plusieurs corps, comme l'écartement des feuilles d'or de l'électroscope, la déviation de l'aiguille d'un galvanomètre, ce qui équivaut à une variation de forme de la figure composée par plusieurs corps. Pour construire un appareil de mesure, il faut donc préalablement avoir défini ce que c'est que la forme d'un corps, c'est-à-dire avoir choisi une des trois métriques compatibles avec les axiomes de Lie. *Adopter le postulat d'Euclide, c'est alors faire une convention instrumentale*, qui consiste à choisir un certain type de corps, les solides naturels, comme instruments de mesure propres à définir ce qu'est la forme d'un corps, c'est-à-dire propres à nous indiquer quand il conviendra de dire que deux distances sont égales. C'est en ce sens que Poincaré a pu écrire : « Quand je dis que l'unité de longueur est le mètre, c'est un décret que je porte, ce n'est pas une constatation qui s'impose à moi. Il en est de même, je crois l'avoir démontré, du postulat d'Euclide[1]. »

Ainsi, suivant le point de vue auquel l'on se place, suivant qu'il s'agit de la géométrie pure ou de géométrie appliquée, le postulat d'Euclide apparaît tour à tour comme une *fonction propositionnelle* ou comme une *proposition assertorique*, comme une *convention nominale* ou comme une *convention instrumentale*. Pour les Anciens, qui se souciaient avant tout d'applications

[1] V. S., p. 225.

pratiques, qui liaient irrésistiblement aux notions premières de la géométrie la représentation intuitive de certaines figures empiriques, qui faisaient appel dans le cours de démonstrations, comme on le voit chez Euclide, à des opérations physiques telles que le déplacement et le retournement de figures solides, le postulat était une vérité empirique, résultant de l'existence des solides naturels capables d'effectuer des translations. Pour les Modernes, qui connaissent les géométries non-euclidiennes, qui suivent la *méthode axiomatique* de David Hilbert, qui isolent les formes pures, constituées par des systèmes d'implications formelles, des faits matériels dans lesquels elles sont primitivement engagées, le postulat d'Euclide apparaît comme une *convention*, choisie parmi d'autres possibles.

Cette convention, bien que facultative, n'est toutefois pas *arbitraire*. Le postulat d'Euclide est choisi, comme étant la convention la plus opportune, pour des raisons de commodité théorique et de convenance pratique.

1° La géométrie d'Euclide est mathématiquement la plus simple, et « elle est la plus simple en soi, de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré, les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celles de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique[1]. » Nous verrons tout à l'heure la raison de cette simplicité mathématique[2].

2° La géométrie euclidienne est pratiquement la seule utilisable, parce que, dès qu'il s'agit d'appliquer la géométrie à la détermination des grandeurs physiques, à mesure de l'aire d'un champ, au jaugeage d'un volume, à des opérations de triangulation, il faut se servir d'instru-

[1] *S. H.*, p. 67.
[2] *Vide infra*, p. 174.

ments de mesure. A ce titre, il faut choisir des corps que l'on puisse considérer comme à peu près indéformables, c'est-à-dire dont les mouvements, moyennant quelques corrections, se comportent suivant les substitutions d'un quelconque des trois groupes définis par les axiomes de Lie. On ne sait pas *a priori* s'il existe de semblables corps dans la nature. On ne sait pas *a priori*, à supposer qu'il en existe, auquel des groupes métriques de Lie ils sont conformes. Or, nous constatons qu'il existe dans la nature des corps remarquables, dont les déplacements se comportent sensiblement comme les substitutions du groupe euclidien. Il n'apparaît pas, au contraire, qu'il y ait des corps naturels dont les mouvements se comportent suivant les substitutions des groupes métriques non-euclidiens. Si donc nous voulons faire de la géométrie appliquée, nous ne pouvons nous servir que d'instruments de mesure répondant à la définition des corps indéformables relative au groupe euclidien : *en ce sens, la géométrie euclidienne est la seule géométrie appliquée*. Ou, du moins, elle le sera tant que les mécaniciens n'auront pas construit, de toutes pièces, des solides dont les mouvements se composent à la manière des substitutions des groupes non-euclidiens. Comme ils seraient capables de le faire, la géométrie euclidienne n'est donc pas, à rigoureusement parler, la seule géométrie susceptible d'application, mais c'est la géométrie applicable le plus commodément et à moins de frais.

Pour se rendre compte de la difficulté qu'il y aurait à adopter pratiquement une autre géométrie, il suffit de songer à ceci. Supposons que nous choisissions un groupe métrique, tel que la Terre se comporte comme un solide non-euclidien invariable. Alors, le Soleil, la Lune, les planètes, les étoiles seront des corps variables. Pour faire de l'astronomie commodément, il faudra un groupe spécial, différent du groupe approprié à la physique

terrestre, et cela pour chaque corps céleste. L'astronomie deviendrait d'une complication extraordinaire.

IV. Confirmation de l'interprétation précédente tirée du principe de relativité.

Si la théorie précédente est fondée, le postulat d'Euclide est une convention commode, suggérée par l'expérience. On peut alors imaginer que l'expérience, dans certaines circonstances, puisse nous conduire à adopter une autre convention.

C'est ce qui est advenu, à la suite des expériences qui ont provoqué la découverte du principe de relativité d'Einstein.

En vertu de ce principe, tous les corps subissent une contraction longitudinale dans le sens de leur translation : la contraction de Lorentz. Il en résulte que la notion de solide naturel euclidien ne subsiste plus, et qu'il faut cesser d'envisager les solides naturels comme indéformables. M. Varićak[1] a remarqué alors les étroites analogies qui lient la physique nouvelle et la géométrie non-euclidienne. Dans l'une comme dans l'autre intervient un certain paramètre, appelé rayon de courbure spatiale et vitesse de la lumière. Dans l'une comme dans l'autre, ce paramètre est une grandeur finie, et, pour une valeur infinie qu'on lui accorde, on retrouve respectivement la géométrie d'Euclide et la mécanique de Newton comme cas limites. A la contraction de Lorentz, dans la physique de la relativité, correspond la déformation des largeurs dans la troisième interprétation euclidienne fournie par Poincaré de la géométrie lobatchefskienne, où l'élément

[1] Vl. Varićak, *Ueber die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie*, ap. *Jahr. d. Deut. Math.-Ver.*, 1912, p. 103-127. — Comp. L. Rougier, *De l'utilisation des Géométries non-euclidiennes dans la physique de la relativité*, ap. *l'Enseignement mathématique*, 15 janvier 1914, p. 5-18.

linéaire ne peut généralement se déplacer sans subir de déformations. Dans la physique de la relativité la règle du parallélogramme des vitesses cesse d'être valable ; il n'y a pas de parallélogramme dans la géométrie de Lobatchefski. Le développement de celle-ci s'est heurté à de nombreuses antinomies apparentes ; il en est de même du développement de celle-là avec les paradoxes d'Ehrenfest et de Born.

Ces analogies conduisirent M. Varićak à exprimer les équations de la physique d'Einstein à l'aide de la géométrie de Lobatchefski. Il lui apparut vite que non seulement les formules se simplifiaient, mais qu'elles acquéraient une signification géométrique en absolue corrélation avec l'interprétation de la théorie classique au moyen de la géométrie d'Euclide. Cette similitude va si loin qu'il n'y a souvent pas lieu de modifier l'énoncé des théorèmes de la théorie classique, à la seule condition de substituer, aux figures euclidiennes, les figures correspondantes de la géométrie lobatchefskienne, en prenant, pour constante spatiale, la vitesse de la lumière dans le vide, $c = 3.10^{10}$ cm. La notion de solide naturel peut alors être conservée ; seulement les solides ne se comportent plus dans leurs déplacements comme des solides euclidiens, mais comme des solides hyperboliques d'un espace à courbure constante négative à trois dimensions. La géométrie de Lobatchefski se présente ainsi comme l'instrument le plus adéquatement approprié au traitement mathémathique de la physique de la relativité. Elle revendique pour son compte la précellence attribuée jusqu'à nos jours à celle d'Euclide.

Est-ce à dire que la géométrie de Lobatchefski soit physiquement vraie et celle d'Euclide fausse? La proposition n'a aucun sens. On peut se servir de la géométrie ordinaire dans la physique de la relativité, et c'est ce qu'ont fait Lorentz et Einstein ; seulement les solides

naturels n'apparaissent plus comme des solides euclidiens indéformables, mais comme des corps soumis à une déformation systématique. Il sera dès lors toujours loisible de choisir entre ces deux alternatives : traiter les solides naturels comme des solides lobatchefskiens indéformables ou comme des solides euclidiens qui subissent, dans leurs déplacements, la contraction de Lorentz. La seconde interprétation sera seulement plus compliquée que la première. Jamais l'expérience ne nous imposera l'une ou l'autre façon de nous exprimer, pas plus qu'elle ne nous impose la langue française ou la langue anglaise, puisque les expériences ont porté sur les corps, non sur l'espace.

V. Nature de l'axiome des trois dimensions.

Poincaré s'est posé, au sujet de l'axiome des trois dimensions, la même question qu'au sujet du postulat d'Euclide[1] : quelle est la nature de cet axiome? Est-il un jugement synthétique *a priori*, comme le croit Kant, ou une vérité *a posteriori*, comme l'enseignent les empiristes ; ou bien, est-ce tout simplement une convention, suggérée par l'expérience, dont il importe seulement de préciser la nature?

L'axiome des trois dimensions est une convention qui consiste à adopter, parmi plusieurs autres possibles, une

[1] Plus exactement, Poincaré se pose la question au sujet de tous les axiomes de l'*Analysis Situs* : « Les mêmes questions qui se posaient à propos des vérités de la géométrie euclidienne se posent de nouveau à propos des théorèmes de l'*Analysis Situs* Peuvent-ils être obtenus par un raisonnement déductif? Sont-ce des conventions déguisées? Sont-ce des vérités expérimentales? Sont-ils les caractères d'une forme imposée soit à notre sensibilité, soit à notre entendement ? » (*V. S.*, p. 67) Mais, de même qu'il n'a explicitement appliqué sa théorie qu'au postulat d'Euclide parmi tous les axiomes métriques, il n'envisage dans la suite, parmi tous les axiomes topologiques, que celui des trois dimensions (Cf. *Ibid.*, p. 69).

certaine interprétation matérielle des symboles non définis de la géométrie. Il revient, en effet, à dire : *je décrète de choisir le point comme élément de l'espace.* Nous aurions pu faire une autre convention, choisir la droite, par exemple, ou toute autre figure respectant les deux conditions formulées dans le *principe de Plücker.* L'espace aurait alors 4, 5, ... *n* dimensions, et la traduction des phénomènes physiques serait également possible dans ces différents cas. En effet, les groupes ainsi obtenus auraient tous même structure. Or, deux interprétations du monde qui ont la même structure sont formellement identiques, car tout ce que nous pouvons connaître des phénomènes, c'est leur structure.

Prétendre comme Kant que l'axiome des trois dimensions est le type des jugements apodictiques, ou mieux encore, comme Schelling, qu'il nous est imposé par les lois mêmes de notre pensée, c'est prétendre qu'un simple décret : *j'adopte le point comme élément de l'espace*, peut jouir d'une nécessité rationnelle. Prétendre que c'est une vérité expérimentale, c'est prétendre que l'espace a souvent trois dimensions, mais pas toujours, parce que les faits expérimentaux, qu'on pourrait alléguer dans ce sens, se vérifient la plupart du temps, mais souffrent des exceptions. Tout ce que l'expérience nous montre, c'est qu'il est commode d'attribuer à l'espace trois dimensions[1].

L'axiome des trois dimensions diffère radicalement, en tant que convention, du postulat d'Euclide. *Celui-ci se rapporte à la forme du groupe euclidien, c'est-à-dire à sa structure; celui-là se rapporte à sa matière.* Adopter le premier, c'est adopter un certain groupe qui permet de définir ces mots vides de sens : *égalité de deux distances, déplacements sans changement de forme, droites, plans.* Adopter le second, c'est choisir la matière du groupe

[1] Cf. *V. S.*, chap. v, § 5.

dont la structure a été ainsi définie. On ne peut rejeter le postulat d'Euclide sans modifier la structure du groupe métrique ; mais on peut prendre d'autres éléments d'espace que le point, tout en conservant le même groupe.

C'est pour cela que les axiomes d'Helmholtz et de Lie, qui définissent la structure du groupe des déplacements, doivent s'énoncer pour le cas indéterminé de n dimensions, avant d'introduire la condition $n = 3$. Poincaré gourmande justement Lie pour avoir posé le nombre ternaire des dimensions avant d'avoir défini la structure des groupes métriques ; pour avoir caractérisé la manière avant la forme, en assignant comme matière à la géométrie une variété numérique à trois dimensions. Pour Poincaré, au contraire, la forme préexiste à la matière. Cela lui permet d'échapper à une objection faite souvent à Helmholtz et à Lie : « Votre groupe présuppose l'espace ; pour le construire, vous êtes obligés de poser un continu à trois dimensions. Vous procédez comme si vous connaissiez la géométrie analytique. » Ce reproche ne subsiste plus, lorsqu'on s'y prend à la manière de Poincaré[1].

VI. Confirmation de l'interprétation précédente tirée du principe de relativité : la géométrie de Laguerre et celle de Minkowski.

L'expérience nous montre qu'il est simplement commode d'attribuer trois dimensions à l'espace. Cela implique que certaines circonstances physiques pourraient se présenter, telles que nous trouverions plus commode de remplacer l'étude de l'espace, envisagé comme variété numérique à trois dimensions, par celle d'une variété numérique à un plus grand nombre de dimensions. C'est précisément ce qui s'est produit à

[1] *On the Foundations of Geometry*, ap. *The Monist*, octobre 1898, p. 40-41.

l'occasion de la découverte du principe de relativité. Certains géomètres ont trouvé plus commode, pour étudier la physique de la relativité, de substituer, à la géométrie d'Euclide, celle de Laguerre, qui admet comme élément d'espace la sphère orientée, ou celle de Minkowski, qui n'est autre que la géométrie euclidienne à quatre dimensions, avec une quatrième coordonnée imaginaire. Mais, auparavant, il faut dissiper quelques équivoques créées par l'ambiguïté de cette expression : espace à n dimensions.

Dans la géométrie analytique ordinaire, un point est un système de trois variables, x_1, x_2, x_3. Rien n'empêche alors d'appeler point un système de quatre variables, x_1, x_2, x_3, x_4, et d'étudier les transformations que l'on peut faire subir à des systèmes composés de pareils éléments. On forme ainsi une géométrie à quatre dimensions, et, moyennant certaines conventions de langage, on obtient des propositions tout à fait analogues à celles de la géométrie ordinaire. On a coutume d'attribuer à ces propositions un sens purement algébrique. L'avantage que l'on retire d'une pareille procédure, c'est de disposer d'un langage qui permette de dire en termes concis ce que celui de l'analyse exprimerait en phrases prolixes. Ce langage permet encore, en nommant du même nom ce qui ressemble, de souligner des analogies fécondes qui auraient passé inaperçues, et de suivre plus facilement les raisonnements relatifs à quatre, cinq, n variables. C'est du moins ce que l'on soutenait dans la génération précédente. Tout au plus admettait-on la possibilité de représenter l'espace à quatre dimensions par projection dans l'espace à trois dimensions, tout comme l'on représente des objets à trois dimensions par projection sur un plan.

Aujourd'hui, avec le développement de l'*Analysis situs*, dû aux efforts de Riemann, de Betti et de Poincaré, il

n'en est plus de même : « Cette géométrie à plus de trois dimensions, écrit Poincaré, n'est pas une simple géométrie analytique ; elle n'est pas purement quantitave, elle est aussi qualitative, et c'est par là surtout qu'elle est intéressante... On peut faire une *Analysis situs* à plus de trois dimensions... Il faut qu'on arrive à la construire complétement dans les espaces supérieurs ; on aura alors un instrument qui permettra réellement de voir dans l'hyperespace et de suppléer à nos sens[1]. » Revenant sur la même idée, Poincaré déclare ailleurs : « Il y a donc bien une intuition des continus à plus de trois dimensions, et, si elle exige une attention plus soutenue que l'intuition géométrique ordinaire, c'est sans doute une affaire d'habitude, et aussi l'effet de la complication rapidement croissante des propriétés des continus quand augmente le nombre des dimensions[2]. »

L'emploi de l'espace à quatre, cinq, *n* dimensions a facilité la représentation de certains phénomènes physiques. C'est ainsi qu'en stéréochimie, on ne trouve pas dans l'espace ordinaire un schéma de l'atome d'azote analogue à celui de l'atome du carbone ; au contraire, il semble qu'on puisse représenter les cinq valences de l'azote à l'aide d'un pentaèdre de l'espace à quatre dimensions. Dans un autre domaine, Beltrami et Hertz ont montré comment se simplifie le traitement d'un problème mécanique qui comporte *n* degrés de liberté, lorsqu'on a recours à l'hyperespace. Supposons un système formé de *n* points matériels, visibles ou non, assujettis à certaines liaisons ; cela fera en tout 3 *n* coordonnées. Regardons celles-ci comme des coordonnées d'un point unique dans l'espace à 3 *n* dimensions. Les principes de la mécanique classique pourront se réduire à un seul :

[1] *S. M.*, p. 39-40.
[2] *D. P.*, p. 96.

le point unique sera assujetti à rester sur une surface d'un nombre quelconque de dimensions inférieures à 3 n en vertu des liaisons admises, et à se rendre d'un point à un autre de cette surface, en suivant le plus court chemin, c'est-à-dire la géodésique qui passe par ces deux points.

On peut entendre les choses d'une tout autre façon. On peut considérer les géométries à quatre, cinq, n... dimensions comme les géométries que l'on obtient en choisissant un autre élément de l'espace que le point. C'est ainsi qu'on obtient une géométrie à quatre dimensions en prenant la droite comme élément d'espace, puisqu'il faut quatre variables pour déterminer une droite.

Peut-on trouver un intérêt quelconque à substituer au point un autre élément de l'espace, et, par suite, à remplacer l'espace, qui est une variété numérique à trois dimensions, par une variété ayant un plus grand nombre de dimensions ? A cette question, il convient de répondre par l'affirmative.

Les principes de la mécanique classique impliquent que les phénomènes mécaniques qui se passent à l'intérieur d'un système isolé ne dépendent pas de son état de repos ou de translation uniforme. C'est ce qui constitue la relativité du mouvement. Cela veut dire que les équations de la dynamique ne sont pas altérées, si l'on remplace les axes rectangulaires de coordonnées, auxquels on réfère le système, par d'autres axes en repos ; ni si l'on change l'origine du temps ; ni si l'on substitue aux axes rectangulaires fixes des axes rectangulaires mobiles, mais dont le mouvement, par rapport aux premiers, est une translation uniforme. Les équations de transformation, qui permettent de passer d'un de ces systèmes d'axes à un autre, forment un groupe, appelé *groupe*

galiléen, qui conserve la forme des équations de la mécanique classique. Ce groupe renferme des invariants remarquables : la simultanéité de deux événements, l'intervalle dans le temps de deux événements successifs, l'ordre absolu de succession dans le temps de deux événements distants dans l'espace. Ces notions sont indépendantes des observateurs, de leurs positions relatives dans l'espace et de leur état de repos ou de translation uniforme. Le temps apparaît alors comme une variable indépendante de l'espace. L'espace et le temps sont deux absolus, séparément invariants.

Il y a plus. La distance dans l'espace d'événements successifs change avec le système de référence adopté ; deux objets, jetés l'un après l'autre par la portière d'un train, constituent deux événements qui se passent au même endroit pour les observateurs liés au train, en des endroits différents pour des observateurs liés au sol. Mais, s'il s'agit d'événements simultanés, la distance dans l'espace est indépendante du mouvement des observateurs ; en particulier, la forme d'un corps, considérée comme l'ensemble des positions simultanées des points matériels de son pourtour, est indépendante de l'état de mouvement des observateurs : elle est un invariant du groupe de Galilée.

Appelons configuration géométrique, la configuration d'un corps mesuré par des observateurs qui lui sont liés ; appelons configuration cinématique, la configuration d'un corps en mouvement, mesurée, lors de son passage, par des observateurs en repos qui visent simultanément, c'est-à-dire au même instant à leurs horloges préalablement synchronisées par l'échange de signaux, les différents points de son pourtour. La configuration cinématique d'un corps est identique à sa configuration géométrique.

On a cru possible, pendant tout le XVIIIe siècle et la plus grande partie du XIXe, de donner une explication

mécanique de tous les phénomènes naturels. S'il en est ainsi, les lois de la physique doivent posséder, comme celles de la mécanique, la propriété de conserver leur forme pour toutes les transformations du groupe de Galilée compatibles avec la notion du temps absolu. On démontre alors, en admettant la théorie des ondulations imposée par l'expérience, que la lumière ne doit pas se propager avec la même vitesse dans toutes les directions à la fois, pour divers groupes d'observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres. Il suit de là que l'on doit pouvoir mettre en évidence, par des expériences optiques ou électro-magnétiques, le mouvement absolu de la Terre par rapport à l'éther immobile, considéré comme le siège des ondes électromagnétiques et lumineuses.

C'est le résultat négatif des expériences entreprises dans ce sens qui a conduit les physiciens à rejeter le groupe de Galilée, pour lui substituer un nouveau groupe, le *groupe de Lorentz*, qui doit conserver la forme nouvelle à donner aux lois de la nature[1].

Voyons comment on peut arriver à déterminer analytiquement la structure de ce nouveau groupe[2]. L'échec des expériences entreprises pour déceler le mouvement absolu de la Terre par des expériences électromagnétiques, conduit immédiatement au résultat suivant : la lumière se propage avec une vitesse constante, dans toutes les directions, pour des observateurs en repos ou en mouvement. C'est ce que l'on traduit analytiquement de la façon suivante :

[1] Cf. H.-A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, *Eine Sammlung von Abhandlungen*, Teubner, 1913; Laue, *Das Relätivitätsprinzip*, 1911; P. Langevin, *le Temps, l'espace et la causalité dans la Physique moderne*, ap. *Bull. Soc. fr. de Phil.*, t. XII, 1912.

[2] Cf. F. Klein, *Ueber die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe*, ap. *Jahr. deut. Math.-Ver.*, Leipzig, 1910, p. 281-300; E. Cartan, *la Théorie des groupes*, ap. *Revue du Mois*, 10 avril 1914, p. 452-457.

Soit une perturbation électromagnétique (x, y, z, t), qui part d'un point de l'espace à un certain instant : elle constitue un événement initial. En se propageant, elle engendre une succession d'événements élémentaires à trois dimensions $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ infiniment voisins de l'élément initial, satisfaisant à une certaine relation qui définit ce que l'on peut appeler les lois de la propagation instantanée de la perturbation. Avec les idées classiques, cette relation est une équation homogène et du second degré en dx, dy, dz, dt, les coefficients étant des fonctions quelconques de x, y, z, t, ce qui exprime que la vitesse de propagation est constante et égale à celle de la lumière.

Considérons toutes les transformations qui, appliquées aux événements de l'Univers, respectent les lois de la propagation instantanée des perturbations électromagnétiques. Elles forment un groupe fini qui peut être à un plus ou moins grand nombre de paramètres suivant la nature de ces lois. Admettons, en outre, les deux postulats suivants, calqués sur ceux de Lie :

1° Il existe toujours une transformation du groupe faisant correspondre à un événement quelconque un autre événement quelconque, ce qui revient à supposer l'univers *homogène* par rapport à l'espace et par rapport au temps.

2° Un événement étant fixé par la pensée, il existe encore une infinité de transformations dépendant de trois paramètres au moins et respectant les lois de propagation considérées.

Dans ces conditions, on démontre que le groupe est à *quinze* paramètres et qu'on peut choisir les coordonnées (x, y, z, t) de manière à ce que les lois de la propagation instantanée des perturbations électromagnétiques soient représentées par l'équation ;

$$dy^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0.$$

Introduisons maintenant la notion des événements à l'infini et ne conservons que les transformations du groupe qui laissent à l'infini les événements à l'infini. Le groupe se réduit alors à onze paramètres ; chacune de ses transformations est linéaire et reproduit l'expression

$$dy^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

à un facteur constant près. L'introduction d'une unité de mesure permet enfin de réduire le groupe à dix paramètres, en ne considérant que les transformations qui reproduisent exactement l'invariant précédent.

C'est ce groupe à dix paramètres, qui est le groupe de Lorentz, qu'on substitue au groupe de Galilée. Les invariants de l'ancien groupe ne subsistent plus dans le nouveau. La simultanéité et l'ordre de succession des événements distants dans l'espace deviennent des notions purement relatives : deux événements, simultanés pour certains observateurs, ne le sont plus pour d'autres en mouvement par rapport aux premiers ; l'ordre même de la succession de deux événements, dont la distance dans l'espace est supérieure au chemin parcouru par la lumière pendant leur intervalle, peut être renversé pour des observateurs différents. Il n'y a plus un temps absolu universel ; il y a un temps propre ou local pour tout fragment de matière, qui est l'intervalle de temps, mesuré par les observateurs qui lui sont liés, entre deux événements qui s'y succèdent et qui coïncident pour eux dans l'espace. La configuration géométrique et la configuration cinématique cessent d'être équivalentes. Celle-ci diffère de la première, du fait de la contraction de Lorentz que subissent les corps dans le sens de leur translation dans le rapport de $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$, β représentant le rapport de la vitesse du mobile envisagé et de la vitesse de la lumière dans le vide $\frac{v}{V}$. La notion du solide naturel euclidien ne subsiste plus, puisque les corps se déforment dans le sens de leur

translation. Si l'on veut encore parler de solides, il faut substituer à la géométrie d'Euclide celle de Lobatchefski : les solides naturels qui subissent la contraction de Lorentz se comportent comme des solides hyperboliques d'un espace à courbure négative, en prenant pour valeur de constante spatiale la vitesse de la lumière dans le vide, $V = 3.10^{10}$ cm.

Il résulte de la structure du nouveau groupe que les notions d'espace et de temps cessent d'être indépendantes ; elles s'absorbent dans celle plus générale de l'*Univers*, définie comme l'ensemble des événements. Un événement consiste dans le fait qu'à un instant donné t, en un point M de coordonnées x, y, z, il se passe quelque chose, le point et le temps dépendant d'un système de référence, mais l'événement étant conçu comme indépendant, de même qu'en géométrie les coordonnées d'un point dépendent d'un système d'axes, mais le point lui-même est conçu d'une manière intrinsèque. De même qu'il faut trois coordonnées x, y, z pour déterminer la position d'un point en se référant à un système d'axes, il faut quatre coordonnées x, y, z, t pour déterminer un événement de l'Univers, l'Univers étant par cela même une variété numérique à quatre dimensions.

Le groupe de Lorentz a son origine dans les hypothèses extrêmement larges qui ont été posées et il ne présuppose en aucune manière la géométrie. Au contraire, la géométrie ordinaire lui est logiquement subordonnée, comme est subordonnée à la notion d'Univers celle d'espace. En effet, dans le langage d'Univers, l'espace est défini comme l'ensemble des événements simultanés. La forme d'un corps en mouvement est l'ensemble des positions simultanées des différents points de son pourtour. Pour définir l'espace, il faut pratiquer, dans l'ensemble plus complexe de l'Univers, une coupe à temps donné. La géométrie euclidienne est alors l'étude des propriétés des figures formées d'événements simultanés.

La physique de la relativité, qui est l'étude des invariants relatifs au groupe de Lorentz, apparaît alors comme une discipline dans laquelle s'absorbe la géométrie ordinaire.

Puisque nous avons admis qu'à tout groupe continu correspond une géométrie, c'est-à-dire que l'on peut énoncer les invariants d'un groupe continu en langage géométrique, il y a lieu de se demander quelle géométrie correspond au groupe de Lorentz? La réponse est multiple.

Si l'on considère un système d'axes euclidiens rectangulaires, et si l'on prend deux points infiniment voisins, dont l'un est à l'origine, le groupe euclidien est entièrement caractérisé par le fait que leur distance élémentaire :

$$(1)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

est un invariant, indépendant du choix des axes. Dans le groupe de Lorentz, cet invariant ne subsiste pas. Il est remplacé par cet autre :

$$(2)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2,$$

où c désigne une constante, la vitesse de la lumière dans le vide, et ds l'élément de la ligne d'Univers que parcourt un événement élémentaire. Si l'on se sert alors de la métrique projective de Cayley et de Klein, on montre que les transformations qui laissent invariante l'expression (2) ne sont autres que des déplacements dans une géométrie de Cayley à quatre variables homogènes et à absolu réel. C'est ce qui a conduit Klein à déclarer: « Ce que les physiciens actuels nomment la théorie de la relativité n'est autre chose que la théorie des invariants de la multiplicité à quatre dimensions x, y, z, t, que Minkowski appelle l'Univers, par rapport à un certain groupe de collinéations[1]. »

Ces collinéations se réduisent aux changements d'axes

[1] F. Klein, *Art. cit.*, p. 287.

de l'espace hyperbolique à trois dimensions, en prenant pour invariant fondamental, relatif à deux points, la forme quadratique indéterminée[1] :

$$F = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2.$$

2° Il existe une autre géométrie qui correspond au groupe de Lorentz. La géométrie de l'Univers électromagnétique est, en effet, équivalente à la géométrie de Laguerre de l'espace ordinaire[2]. Dans cette géométrie, on considère l'espace comme engendré par des plans ou par des sphères orientées. On étudie le groupe des transformations qui changent les sphères en sphères en conservant les plans et en changeant deux sphères orientées tangentes en deux sphères orientées tangentes. Ces transformations s'obtiennent en composant entre elles ce que Laguerre appelle les transformations par semi-plans réciproques. La sphère orientée, c'est-à-dire la sphère au rayon de laquelle on a attribué un signe, devient ainsi l'image de l'événement de l'Univers.

3° La géométrie de Laguerre est équivalente à la géométrie euclidienne à quatre dimensions, mais la correspondance est ici imaginaire : c'est celle utilisée par Minkowski[3] dans son exposé classique du principe de relativité. Dans ce mode d'exposition, le temps est remplacé par la variable imaginaire $x_4 = it$, qui s'ajoute aux trois coordonnées d'espace, x_1, x_2, x_3.

4° Enfin MM. Wilson et Lewis se sont accordés pour construire une nouvelle géométrie à quatre dimensions, qui permet de retrouver, en partie, comme autant de théorèmes, les invariants physiques dont la présence en

[1] E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Paris, 1914, p. 45.

[2] E. Cartan, *Art. cit.*, p. 456.

[3] Minkowski, *Raum und Zeit*, Leipzig, 1909.

mécanique et en électromagnétisme est entraînée par le principe de relativité [1].

Ainsi se trouve confirmé ce que nous avons dit sur le caractère purement conventionnel de l'axiome des trois dimensions. L'expérience montre qu'il est commode d'attribuer à l'espace trois dimensions ; mais ce qui est suggéré par l'expérience peut être déconseillé par elle. Des découvertes physiques peuvent survenir, et se sont réalisées effectivement, d'une sorte telle que l'on trouve plus commode d'attribuer à l'espace quatre dimensions, soit que l'on prenne un autre élément d'espace que le point, comme la sphère orientée, soit que l'on ajoute aux trois coordonnées ordinaires une quatrième coordonnée imaginaire.

VII. Conclusion.

Les résultats consignés dans les paragraphes précédents permettent de vérifier d'une manière péremptoire les conclusions de Poincaré sur la commodité géométrique.

En présence des mêmes faits naturels, nous voyons les analystes et les physiciens se servir tour à tour de géométries fort différentes : Lorentz et Einstein de la géométrie ordinaire ; Sommerfeld, Varićak et Robb de la géométrie lobatchefskienne à trois dimensions ; d'autres encore de la géométrie de Laguerre ou de celle de MM. Wilson et Lewis, suivant leurs convenances personnelles. On ne saurait mieux établir, par l'exemple, après l'avoir fondé en droit, qu'il n'y a là qu'une question de pure commodité : « Nous avions adopté une convention, déclare Poincaré, parce qu'elle nous semblait commode et nous disions que rien ne pouvait nous contraindre à l'abandonner. Aujourd'hui, certains physiciens veulent

[1] *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, novembre 1912.

adopter une convention nouvelle. Ce n'est pas qu'ils y soient contraints; ils jugent cette convention nouvelle plus commode et voilà tout ; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l'ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes[1]. »

Henri Poincaré ne s'est pas borné à exposer la théorie conventionaliste des axiomes géométriques. Il s'est attaché à discuter les théories adverses, en particulier celles de l'empirisme et du criticisme.

[1] *D. P.*, 54.

CHAPITRE VI

LA GÉOMÉTRIE ET L'EMPIRISME

I. Critique de l'Empirisme géométrique.

Les trois métriques, au point de vue logique, sont des systèmes hypothético-déductifs également cohérents. Ces systèmes ne sont pas identiques, en ce sens que les relations qu'ils énoncent entre les notions premières appelées droites, plans, et les notions dérivées comme celles de triangles, ne sont pas les mêmes, mais ils sont équivalents en ce sens qu'aux notions premières euclidiennes de droites, de plans, correspondent des notions dérivées non-euclidiennes, qui portent dans la métrique de Lobatchefski le nom d'horicycles, d'horisphères, si bien que tout théorème euclidien est susceptible d'un énoncé lobatchefskien. Il en est de même pour la métrique de Riemann.

Nous avons vu que, au point de vue purement logique, les propositions premières, qui caractérisent équivoquement les notions premières, sont des fonctions propositionnelles. A ce titre, elles ne sont pas susceptibles de fausseté ou de vérité : ce sont de simples conventions. Ces fonctions propositionnelles deviennent de véritables propositions, si l'on trouve une interprétation concrète des notions premières indéfinissables, traitées comme de purs symboles.

Par exemple, si l'on découvre des objets physiques qui

répondent aux choses qu'Hilbert appelle des droites, des plans, des distances, les fonctions propositionnelles, qui expriment les relations formelles que soutiennent entre elles ces choses, deviendront des propositions vraies, dans la mesure où sera vérifié ce jugement empirique : il existe des objets physiques qui soutiennent entre eux les mêmes relations formelles que les choses appelées par Hilbert droites, plans, distances, etc.

Supposons qu'il existe des objets empiriques de cette nature : nous dirons que la géométrie euclidienne leur est applicable et qu'elle est vraie empiriquement, ce qui veut dire simplement qu'elle peut recevoir une interprétation physique d'accord avec l'expérience. Comme ces objets empiriques ne correspondent pas aux notions premières des métriques non-euclidiennes, qui jouissent d'autres propriétés, certains philosophes ont pensé que seule la géométrie euclidienne était empiriquement vraie.

Ainsi formulée, la thèse de l'empirisme géométrique est inconsistante. En effet, d'une part les mêmes objets empiriques qui correspondent aux notions premières de la géométrie ordinaire, correspondent à certaines notions dérivées des géométries de Lobatchefski et de Riemann ; d'autre part, il existe dans la nature d'autres objets empiriques qui correspondent tout à la fois aux notions premières des métriques non-euclidiennes et à certaines notions dérivées de la métrique du savant grec.

A la thèse de l'empirisme géométrique ainsi formulée : « la géométrie d'Euclide est empiriquement vraie, les deux autres métriques sont empiriquement fausses », on ne peut donner qu'un seul sens intelligible, qui est le suivant : existe-t-il un phénomène physique qui puisse s'interpréter dans la géométrie d'Euclide et non dans celle de Lobatchefski et de Riemann ? Au cas affimatif, le phénomène en question constituera un *experimentum crucis*, susceptible de trancher entre ces trois métriques. Par

exemple, l'optique de Newton et l'optique de Fresnel rendent également compte des phénomènes de l'optique géométrique, de la réflexion, mais non de la réfraction. Au sujet de la vitesse relative d'un rayon lumineux dans deux milieux de densité différente, ces deux théories conduisent à des prédictions contraditoires. Une expérience cruciale est alors possible, celle de Foucault, qui, condamnant l'optique de Newton, confirme celle de Fresnel. S'il n'en est pas ainsi, ce qui arrive pour un grand nombre de théories mécaniques qui aboutissent aux mêmes équations différentielles, c'est-à-dire à la même expression des lois naturelles seules directement observables, les théories en présence sont expérimentalement équivalentes : on ne peut préférer l'une à l'autre que pour des raisons de commodité, en vertu d'une convention.

En est-il des diverses géométries métriques comme de l'optique de Newton et de celle de Fresnel ? A cette question, les premiers pangéomètres ont cru pouvoir répondre par l'affimative.

Ceux-ci avaient été frappés par l'existence d'une certaine *constante spatiale*, dont la valeur ne peut être déterminée que par l'expérience et qui s'introduit, comme l'avait montré Lambert, dans la mesure de la somme des angles d'un triangle. Cette somme est égale à deux droits, dans l'hypothèse euclidienne ; inférieure à deux droits, dans celle de l'angle aigu, et supérieure à deux droits, dans celle de l'angle obtus. Dans ces deux derniers cas, en désignant par x la différence entre la somme trouvée et deux droits, et par A l'aire du triangle, on peut poser :

$$\frac{\alpha}{A} = - \frac{4}{\pi k^2}$$

$$\frac{\alpha}{A} = + \frac{4}{\pi k^2},$$

et l'on démontre que la valeur de K est indépendante du

triangle particulier considéré. La constante $\frac{\alpha}{A}$, nommée par Gauss *constante spatiale*, se réduit à zéro dans l'hypothèse euclidienne, qu'on obtient comme limite des deux autres pour $K = \infty$; elle est positive et susceptible de prendre une infinité de valeurs, de 0 à $+\infty$, dans la géométrie de Riemann; négative et susceptible de prendre une infinité de valeurs, de 0 à $-\infty$, dans la géométrie de Lobatchefski. Lorsque, dans les métriques non-euclidiennes, on considère des triangles infiniment petits, K tend vers l'infini et l'on retombe, en géométrie non-euclidienne infinitésimale, dans le cas de la géométrie ordinaire. La valeur de la constante spatiale est à déterminer *a posteriori* par des mesures de triangulation.

Tel est le point de vue auquel s'est placé Gauss dans sa correspondance. Il écrit, en effet, le 16 mars 1819 : « J'ai poussé la géométrie astrale (c'est-à-dire non-euclidienne) assez loin pour pouvoir résoudre tous les problèmes aussitôt que la constante = C est donnée[1] »; le 8 novembre 1824 : « Je puis résoudre tous problèmes de géométrie non-euclidienne, à l'exception de la détermination d'une constante, qui ne se laisse pas obtenir *a priori*. Plus cette constante est grande, plus on se rapproche de la géométrie euclidienne, qui correspond à une valeur infinie de la constante... Si la géométrie non-euclidienne était la vraie (géométrie réalisée par la nature) et si cette constante était dans un certain rapport avec les grandeurs accessibles à nos mesures sur la Terre ou au ciel, on pourrait l'obtenir *a posteriori*[2]. » Aussi recourt-il à des mesures de triangulation dans le Hartz, pour voir si les écarts entre les nombres observés et ceux prévus par la trigonométrie euclidienne n'affectent pas une allure systé-

[1] Gauss, *Werke*, VIII, 182.
[2] Gauss, *Werke*, VIII, 187.

matique. Comme rien de tel ne se produit, c'est peut-être, pense-t-il, que les triangles sur lesquels on opère sont trop petits, infinitésimaux, comparés à l'infinitude de l'Univers. Il invite alors son ami Schweikart à recourir à des observations astronomiques, qui permettent de considérer des triangles de dimensions colossales par rapport à ceux de la Terre.

Lobatchefski écrivait lui-même de son côté : « Le seul moyen mis à notre disposition pour déterminer l'exactitude des propositions de la géométrie ordinaire, c'est de faire appel aux observations astronomiques[1] ». Toutefois, il faut procéder dans ce cas d'une façon un peu différente qu'en trigonométrie terrestre. On ne peut pas mesurer les trois angles d'un triangle céleste, dont on suppose que la somme diffère de deux droits, mais seulement deux de ces an les. Si l'on regarde une étoile de deux extrémités du grand axe de l'écliptique, on ne peut mesurer l'angle x sous lequel elle apparaît vue de cet axe, mais seulement les deux angles a et b formés avec celui-ci par les rayons visuels qui vont à l'étoile. Dans l'hypothèse euclidienne, on a :

$$a+b+x=2\,\mathrm{R},$$

et l'angle x est donné par la parallaxe de l'étoile $2\,\mathrm{R}-(a+b)$, que l'on a coutume de déterminer pour le cas où l'un des deux angles a et b est droit. Plus l'étoile est lointaine, plus sa parallaxe est petite, bien que conservant toujours une valeur positive. Dans l'hypothèse de Lobatchefski, les parallaxes de toutes les étoiles seraient supérieures à une certaine limite dépendante de K; dans l'hypothèse de Riemann, les parallaxes d'étoiles très éloignées seraient négatives. L'expérience enseigne que les parallaxes des étoiles sont toutes positives ou sensiblement nulles. On peut alors considérer, aux erreurs près

[1] *Geometrische Untersuchungen*, p. 60.

d'observation, que les rayons lumineux se propagent, dans l'atmosphère terrestre et dans les espaces interstellaires, suivant des lignes droites euclidiennes, ou suivant des droites non-euclidiennes, en supposant la valeur du paramètre non-euclidien K si grande que la différence entre la somme des angles d'un triangle et deux droits soit inférieure à la limite des erreurs d'observation.

Telle n'est point la conséquence que les pangéomètres tirèrent de leurs observations géodésiques et astronomiques. Ils en conclurent que la géométrie euclidienne est une science expérimentale, au même titre que la mécanique, et que l'espace est euclidien. « Je suis de plus en plus convaincu, écrit Gauss, que la nécessité de notre géométrie ne peut être prouvée... On ne devrait pas placer la géométrie à côté de l'arithmétique, qui est purement *a priori*, mais la mettre sur le même rang que la mécanique[1]. » Le 9 avril 1829, il revient sur la même idée : « Nous devons reconnaître humblement que si le nombre est purement une création de notre esprit, l'espace est pour notre esprit une réalité à laquelle nous ne pouvons pas attribuer des lois complètement *a priori*[2]. » Il en tire la condamnation du Kantisme : « Par l'impossibilité où l'on est de distinguer *a priori* entre Σ [géométrie euclidienne] et S [géométrie non-euclidienne] se trouve précisément démontré, le plus clairement, que Kant a eu tort d'affirmer que l'espace est *seulement la forme* de notre intuition[3]. »

Les expériences géodésiques de Gauss sont loin de prouver ce qu'il prétend en déduire. Elles montrent qu'il existe dans l'espace des triangles rectilignes, dont les côtés sont formés à l'aide de rayons lumineux et dont la somme des angles est égale à deux droits ; « mais, écrit Poincaré,

[1] *Werke*, VIII, 177.
[2] *Werke*, VIII, 201.
[3] *Werke*, VIII, 224.

nous connaissons également les triangles curvilignes dont la somme des angles est plus petite que deux droits. L'existence des uns n'est pas plus douteuse que celle des autres. Donner aux côtés des premiers le nom de droites, c'est adopter la géométrie euclidienne ; donner aux côtés des derniers le nom de droites, c'est adopter la géométrie non-euclidienne. De sorte que, demander quelle géométrie convient-il d'adopter, c'est demander : à quelle ligne convient-il de donner le nom de droite ? Il est évident que l'expérience ne peut résoudre une semblable question [1]. »

On peut en dire autant des observations astronomiques de Schweickart. Ces expériences portent, non sur les propriétés de l'espace, mais sur les propriétés des rayons lumineux, et l'on ne peut rien en conclure au sujet de la géométrie. Si on venait à découvrir des parallaxes négatives, ou à vérifier que toutes les parallaxes sont supérieures à une certaine limite, on n'en conclurait pas que la géométrie euclidienne est fausse, mais que les rayons lumineux ne se propagent pas rigoureusement en ligne droite ; on modifierait les lois de l'optique et les propriétés de l'éther, plutôt que de renoncer à la géométrie euclidienne. Le cas n'est pas sans précédent dans l'histoire. Lorsque Bradley découvrit l'anomalie de la parallaxe annuelle de l'étoile γ Draconis, il ne lui vint pas en l'esprit de l'attribuer à une courbure intrinsèque de l'espace. Il édifia la théorie de l'aberration, qui rend compte des apparences tout en sauvegardant la géométrie d'Euclide. Les observations ayant porté sur des phénomènes d'optique sont dénués de force probante au point de vue géométrique. C'est ce qu'a fort bien reconnu Lotze. Les mesures de triangulation, remarqua-t-il, se font à l'aide de rayons lumineux ; si ces mesures ne concordaient pas avec le

[1] *V. S.*, p. 60.

théorème euclidien sur la somme des angles d'un triangle, « nous devrions seulement penser que nous avons découvert une forme nouvelle et très singulière de réfraction, dont l'effet serait de faire dévier les rayons servant à déterminer la direction [1] ».

Il y a plus. Le fait que les rayons lumineux se propagent suivant des droites euclidiennes, dans les observations de Gauss et Schweickart, ne confirme pas plus la géométrie d'Euclide qu'il n'infirme celle de Lobatchefski. En effet, on peut exprimer le même résultat en disant que les rayons lumineux décrivent des horicycles lobatchefskiens. Si le résultat contraire s'était présenté, on l'aurait exprimé indifféremment, en langage non-euclidien, en disant que les rayons parcourent des droites hyperboliques, ou, en langage euclidien, en disant que les rayons décrivent des cercles orthogonaux à une sphère fondamentale[2]. L'expérience ne peut pas nous imposer une de ces façons de parler plutôt que l'autre. Une convention nominale peut seule régler l'usage du discours.

Nous arriverons aux mêmes conclusions, si nous considérons les solides réels. On peut dire qu'ils se comportent approximativement dans leurs déplacements comme les substitutions du groupe euclidien. Plus exactement, il est commode de considérer leurs déplacements comme la résultante de deux changements : 1° un changement peu différent de celui observé et rigoureusement identique au déplacement sans déformation d'un solide euclidien idéal ; 2° un changement très petit, regardé comme une petite variation des propriétés du solide sans caractère géométrique, dû à l'effet de la chaleur ou de la pesanteur. Moyennant cette convention, on peut dire que les solides

[1] *Métaphysique*, § 131, trad. fr., p. 257.
[2] Cf. *S. H.*, p. 93.

naturels se comportent comme des solides euclidiens[1]. Il n'en résulte pas que la métrique d'Euclide soit vraie et seule utilisable empiriquement. On pourrait traduire, en effet, les mêmes apparences dans le langage de la métrique non-euclidienne : ce serait seulement plus compliqué, parce qu'il faudrait considérer les solides naturels comme des corps subissant des déformations géométriques dans leurs mouvements. Bien mieux, on pourrait construire de toutes pièces des solides non-euclidiens ; si la structure des solides conditionnait alors celle de l'espace, « il faudrait conclure que l'espace est à la fois euclidien et non-euclidien[2] ». Considérons, à cet effet, deux figures identiques, l'une en fil de fer, l'autre en fil de cuivre, placées dans un champ magnétique. La figure de cuivre se déplacera euclidiennement, tandis que ce ne sera pas le cas pour la figure de fer. En général, l'ensemble des déplacements de celle-ci ne formera pas un groupe ; mais, il peut arriver que le champ magnétique soit tel que tous ses déplacements en forment un. On aura alors le choix entre deux langages. Employant celui d'Euclide, on pourra dire que la figure de cuivre se comporte comme une figure indéformable, au lieu que celle de fer subit des déformations d'un caractère géométrique; employant celui de Lobatchefski ou de Riemann, on pourra dire que la figure de fer se comporte comme une figure indéformable, au lieu que celle de cuivre subit des déformations d'un caractère géométrique. On optera pour l'une ou l'autre de ces façons de s'exprimer, suivant celle que l'on trouvera la plus commode.

« En résumé, de quelque façon qu'on se retourne, il est impossible de découvrir à l'empirisme géométrique un sens raisonnable[3]. » Cela est dû à deux raisons :

[1] Cf. H. Poincaré, *Réponse à quelques critiques*, ap. *R. M. M.*, 1897, p. 65; *V. S.*, p. 240-242.

[2] *S. H.*, p. 104.

[3] H. Poincaré, *les Fondements de la Géométrie à propos d'un livre de M. Russell*, ap. *R. M. M.*, mai 1899, p. 269.

La première est qu'il n'existe pas de fait physique qui, interprétable dans la géométrie d'Euclide, ne le soit pas dans les deux autres métriques, puisque nous avons établi que tout théorème euclidien peut recevoir une traduction non-euclidienne et réciproquement. Les objets physiques, qui vérifient les propriétés de la droite et du plan euclidiens, ne vérifient pas les propriétés de la droite et du plan lobatchefskiens, mais celles de l'horicycle et de l'horisphère ; or, le choix des termes droite ou horicycle, plan ou horisphère, pour désigner les mêmes objets, ne peut être que conventionnel. Bref, les trois géométries, qui interprètent les mêmes phénomènes physiques en des langages différents, ne sont pas plus susceptibles d'être contradictoires et de s'offrir à une expérience cruciale, que les indications d'un thermomètre Réaumur ne sont contradictoires avec celles d'un thermomètre Fahrenheit. C'est en ce sens que Poincaré a pu écrire : « Soutenir que certains phénomènes, possibles dans l'espace euclidien, seraient impossibles dans l'espace non-euclidien, de sorte que l'expérience, en constatant ces phénomènes, contredirait l'hypothèse non-euclidienne..., équivaut tout à fait à la question suivante, dont l'absurdité saute aux yeux de tous : y a-t-il des longueurs que l'on peut exprimer en mètres et centimètres, mais que l'on ne saurait mesurer en toises, pieds et pouces, de sorte que l'expérience, en constatant l'existence de ces longueurs, contredirait directement cette hypothèse qu'il y a des toises partagées en six pouces[1] ? »

A cette première raison s'en ajoute une seconde. En mécanique et dans les sciences physiques, les expériences portent sur des phénomènes proprement mécaniques et physiques ; et c'est pour cela que les expériences peuvent être cruciales pour des théories en compétition. Il n'existe

[1] *S. H.*, p. 105.

pas de faux-fuyant pour mettre l'optique de Newton d'accord avec l'expérience de Foucault. Tel n'est plus le cas, lorsqu'il s'agit de géométrie. Les expériences que l'on pourrait tenter pour prouver la vérité empirique d'une des trois métriques à l'exclusion des deux autres, ne portent jamais sur l'espace, ni sur les rapports des diverses parties de l'espace, ou des corps avec l'espace qui les entoure : elles portent sur les propriétés des corps solides, de notre œil et de nos membres en particulier, et sur la direction des rayons lumineux. Ce sont des expériences de cinématique, d'optique et de physiologie, que l'on ne peut à aucun titre considérer comme des expériences de géométrie, et dont on ne peut rien conclure touchant les propriétés de l'espace. Lorsqu'un phénomène paraîtra contredire une des trois métriques, on pourra toujours l'interpréter à l'aide de phénomènes physiques ou physiologiques, de façon à laisser la géométrie envisagée hors de cause. « Les expériences, écrit Poincaré, qui nous ont conduits à adopter comme plus commodes les conventions fondamentales de la géométrie, portent sur des objets qui n'ont rien de commun avec ceux qu'étudie la géométrie ; elles portent sur les propriétés des corps solides, sur la propagation rectiligne de la lumière. Ce sont des expériences de mécanique, des expériences d'optique ; on ne peut à aucun titre les regarder comme des expériences de géométrie. Et même la principale raison pour laquelle notre géométrie nous semble commode, c'est que les différentes parties de notre corps, notre œil, nos membres jouissent précisément des propriétés des corps solides. A ce compte, nos expériences fondamentales sont des expériences de physiologie qui portent, non sur l'espace, qui est l'objet que doit étudier le géomètre, mais sur son corps, c'est-à-dire sur l'instrument dont il doit se servir pour cette étude[1]. »

[1] *S. H.*, p. 163-164.

II. Rôle de l'expérience dans la genèse de la Géométrie.

La géométrie n'est pas une science empirique. Est-ce à dire que l'expérience n'ait joué aucun rôle dans son acquisition? Assurément non, car nous avons déjà vu que, si le postulat d'Euclide est une convention, cette convention est justifiée par des faits expérimentaux extra-géométriques qui, sans l'imposer, la suggèrent. De plus, ce qui est vrai du postulat d'Euclide, l'est-il encore des autres axiomes de la géométrie ? Pour le savoir, il faut analyser le rôle de l'expérience dans la genèse de la géométrie.

Pour apprécier ce rôle, il y a bien des façons de procéder. Nous partirons de cette donnée, déjà considérablement élaborée, que l'on appelle « l'espace sensible » ou « l'espace représentatif ». Nous examinerons en vertu de quelles expériences extra-géométriques un algébriste, qui serait au fait de la théorie des groupes de transformations sans rien connaître de la géométrie, serait amené, en vertu de choix successifs, à élire le groupe euclidien comme groupe métrique. Pour plus de commodité, nous numéroterons les étapes successives qui le conduisent au choix final [1].

1° Déplacements. — Partons de l'espace représentatif fourni par nos sens. Il n'a aucune des propriétés de l'espace géométrique, qui est purement conceptuel. Il n'est ni infini, ni homogène, ni isotrope, ni nécessairement à trois dimensions. Il varie avec chacun de nos sens.

L'espace visuel pur est à deux dimensions ; il est limité

[1] Dans ce paragraphe, nous suivons pas à pas, et quelquefois littéralement, l'article de Poincaré, *On the Foundations of Geometry*, ap. *The Monist*, octobre 1898, p. 1-48.

et fini ; il n'est pas homogène, la tache jaune et les points du bord extrême de la rétine n'étant pas équivalents aux autres points ; il est discontinu par suite de l'existence du *punctum cæcum* ; il est anisotrope, un crayon apparaissant différemment suivant qu'on le tient horizontalement devant les yeux ou qu'on applique normalement un de ses bouts entre les arcades sourcillières.

L'espace tactile est à deux dimensions. Il est fermé et discontinu par suite de l'existence de régions insensibles de la peau. L'espace musculaire ou moteur a, en un sens, autant de dimensions que nous avons de muscles ; il n'est ni homogène, ni isotrope, par suite de notre dissymétrie organique.

C'est grâce à l'association de nos sensations visuelles et musculaires, à la possibilité de nous mouvoir et à l'existence de solides naturels que nous avons été conduits à élaborer la notion de l'espace géométrique.

Nous sommes conduits, tout d'abord, à distinguer deux sortes de changements dans l'univers : les changements externes, qui ne dépendent pas de nous, et les changements internes, qui sont volontaires et s'accompagnent de sensations musculaires. Parmi les premiers, il y en a qui peuvent être corrigés moyennant un changement interne compensateur : ce sont les *déplacements ;* il en est d'autres qui ne le peuvent pas : ce sont les *changements d'état*. Les changements internes, capables de corriger un changement externe, s'appellent *déplacements du corps en bloc ;* les autres changements internes s'appellent *changements d'attitude*. Par exemple, nous constatons que, si un corps s'éloigne de nous de la position A à la position B, son image se contracte et sa forme s'altère. Si nous nous avançons à notre tour, de A en B, deux cas peuvent se présenter : ou bien l'objet a réellement changé de forme, par suite d'un changement d'état, et nous n'éprouvons plus en face de lui les mêmes

sensations visuelles ou tactiles qu'au départ; ou bien c'est le contraire qui se produit, et nous en concluons que l'objet s'est simplement déplacé. De tels déplacements sont caractérisés par le fait que nous pouvons toujours les corriger moyennant un déplacement corrélatif de notre propre corps, et même moyennant une infinité, tous équivalents, puisqu'il y a une infinité de chemins pour se rendre de A en B. Nous nommons *solides* les corps qui subissent des déplacements sans déformation. *C'est l'existence des corps solides et la possibilité de nous déplacer qui a été pour nous l'occasion de fonder la géométrie.* En effet, la géométrie n'est que l'étude des lois des déplacements. S'il n'y avait pas de solides naturels, comme ce serait le cas dans un univers visqueux, la notion de forme n'existerait pas. De même si, habitant notre univers, nous étions rivés au sol et immobiles, les déplacements des corps solides nous apparaîtraient comme des changements d'état, puisque nous n'aurions plus la faculté de les corriger moyennant un transfert compensateur de notre propre corps.

Cette classification des changements externes en deux groupes n'est toutefois pas un *crude datum* de l'expérience, bien qu'elle soit suggérée directement par elle. En effet, la compensation dont nous venons de parler n'est jamais intégrale ; lorsque nous nous transportons d'un seul bloc de A en B, nous ne restaurons jamais complètement en B les sensations que nous avions éprouvées en A. On a coutume de dire que le corps solide a subi, dans son déplacement, de petites altérations qualitatives dénuées de caractère géométrique : des flexions sous l'effet de la pesanteur et des dilatations sous l'effet de la chaleur. On trouve alors commode de faire la convention suivante : on considère le déplacement du corps de A en B comme la résultante d'un changement sans déformation et de petites variations physiques. Les coups

de pouce que nous donnons ainsi à l'expérience sont légitimes, parce qu'ils ne sont pas trop considérables ; mais s'ils affectaient une allure systématique, comme dans le cas de la contraction de Lorentz, nous serions conduits sans doute à faire d'autres conventions, et à déclarer qu'il n'y a pas de solides naturels, ou tout au moins de solides naturels euclidiens.

La possibilité de nous mouvoir ne nous procure pas seulement l'occasion de distinguer les déplacements des changements de forme. Elle nous permet de définir par convention l'identité de deux déplacements. Deux déplacements seront considérés comme identiques, si on peut les corriger à l'aide du même changement interne, c'est-à-dire en nous déplaçant de façon à éprouver les mêmes sensations musculaires. En effet, si un changement externe α nous fait passer de l'ensemble de sensations A, à l'ensemble de sensations nouvelles B ; si ce changement est corrigé par un mouvement volontaire β ; si, enfin, un autre changement externe α' nous fait passer de nouveau de A en B, l'expérience nous révèle alors l'existence d'un mouvement corrélatif volontaire β', qui correspond aux mêmes sensations musculaires que le mouvement β qui corrigeait α. Il en résulte qu'un déplacement peut être répété deux ou plusieurs fois sans que ses propriétés varient. C'est cette circonstance qui permet d'introduire les nombres et de faire des mesures. C'est grâce à elle que le raisonnement mathématique a prise sur les faits géométriques. C'est cette circonstance que l'on traduit en disant que l'espace est homogène.

2° Groupe des déplacements. — Pour fonder la géométrie, il convient de joindre à la loi d'homogénéité une foule d'autres lois analogues que les mathématiciens résument en disant que l'ensemble des déplacements forme un groupe. Cette propriété exprime que, si A est

un déplacement, et s'il est suivi d'un autre déplacement B, on peut alors considérer l'ensemble de ces deux déplacements comme formant un déplacement unique, que l'on pourra écrire $A+B$ et que l'on appelle leur résultante. *Si tel n'était pas le cas, il n'y aurait pas de géométrie.*

Comment savons-nous que l'ensemble des déplacements forme un groupe?

On serait tenté de croire que c'est en vertu du raisonnement *a priori* suivant : le changement externe A est corrigé par le changement interne α, le changement externe B est corrigé par le changement interne β; alors le changement externe $A + B$, qui résulte de leur addition, sera corrigé par la résultante interne $\beta + \alpha$. Cette résultante est par définition un déplacement, ce qui veut dire que l'ensemble des déplacements forme un groupe.

Le raisonnement précédent est sujet à caution à plus d'un titre. Il est évident que les changements A et α se compensent exactement par définition, c'est-à-dire que, effectués successivement, ils restaurent nos sensations initiales, ce qu'on peut écrire :

$$A + \alpha = 0.$$

Il suit pour la même raison que $B + \beta = 0$. Mais est-il certain que l'on aura $B + \beta = 0$, *après* les deux changements A et α? Si on l'admet, on pourra conclure que nous recouvrerons nos premières sensations, si les quatre changements se suivent dans l'ordre :

$$A + \alpha + B + \beta,$$

mais non pas que la même chose doive se produire s'ils se succèdent dans cet autre ordre :

$$A + B + \beta + \alpha.$$

Ce n'est pas tout. Deux changements externes A et A′ sont regardés comme identiques, parce qu'ils sont susceptibles d'être corrigés par le même changement interne α; si

alors deux autres changements externes B et B′ peuvent être corrigés par le même changement interne β, et par suite sont identiques, nous ne sommes nullement autorisés à conclure *a priori* que les deux changements A + B et A′ + B′ soient susceptibles d'être corrigés par le même changement interne et par suite soient identiques.

Est-ce l'expérience qui nous montre que les déplacements obéissent aux lois que les mathématiciens résument en disant qu'ils forment un groupe? Mais l'expérience ne peut rien nous révéler que d'approximatif ou de révisible et les théorèmes de la géométrie sont rigoureux et définitifs. Ceux-là ne peuvent jamais être mis en défaut par l'expérience. Vient-elle à nous révéler que certains mouvements n'obéissent pas à ces lois : nous les rayons simplement du nombre des déplacements ; vient-elle à nous révéler certains corps dont les mouvements satisfont approximativement à ces lois : nous recourons à la convention précédemment exposée et nous considérons le mouvement de ces corps comme la résultante d'un déplacement sans changement de forme et d'une altération qualitative, si bien que nous sommes sûrs de n'être jamais contredits. En définitive, ces lois ne sont pas imposées par la nature ; c'est nous qui les imposons à la nature ; mais nous les lui imposons, parce qu'elle nous les suggère et qu'elle supporte, sans trop de coups de pouce, que nous en usions ainsi. Si elle offrait trop de résistance, la géométrie, toujours possible en tant que construction théorique, perdrait toute utilité pratique.

La propriété qu'ont les déplacements de former un groupe implique que l'espace est homogène, isotrope et illimité. Si un déplacement A me transporte d'un point à un autre, ou change ma direction, je dois, après un tel déplacement être encore capable des mêmes mouvements qu'auparavant, et ces mouvements doivent avoir conservé leurs propriétés qui ont permis de les classer parmi les

déplacements, sans quoi le déplacement A, suivi d'un autre déplacement, ne serait plus équivalent à un troisième déplacement, et les déplacements ne formeraient plus un groupe. Ainsi, le nouveau point, auquel j'ai été transporté, joue le même rôle que mon point de départ, et ma nouvelle orientation jouit des mêmes propriétés que l'ancienne ; c'est dire que l'espace est homogène et isotrope. Si l'espace est homogène, il est illimité, car les points, qui sont au bord d'un espace limité, ne jouent pas le même rôle que ceux qui sont à son centre. Cela ne veut pas dire qu'il soit infini : la sphère est une surface illimitée, et cependant finie. Toutes ces conséquences sont contenues dans le fait que les déplacements forment un groupe.

3° Continuité. — La première propriété du groupe des déplacements est d'être continu. Voyons comment on l'établit et ce que cela signifie.

Un déplacement A peut être répété deux, trois, *n* fois, etc. Nous obtenons ainsi différents déplacements qui peuvent être considérés comme multiples du premier. Les multiples du même déplacement A forment un groupe, car la succession de deux de ces multiples est encore un multiple de A. Tous ces multiples sont interchangeables, ce qui veut dire qu'il est indifférent que nous répétions A : 1° trois fois, et 2° quatre fois ou *vice versa ;* c'est ce que les mathématiciens traduisent en disant que le groupe formé par les multiples de A est un *lacet*. Ce groupe des multiples de A est un sous-groupe du groupe total des déplacements.

Tous les déplacements peuvent être divisés en lacets. En effet, un déplacement, quel qu'il soit, peut toujours être divisé en deux, trois, *n* parties, c'est-à-dire que l'on trouve toujours un déplacement qui, répété deux, trois, *n* fois, engendre le déplacement total considéré.

Cette divisibilité à l'infini ne peut être prouvée direc-

tement, car un déplacement trop petit est inappréciable. D'autre part, deux déplacements différents très petits sont indiscernables pour nous. Si un déplacement A est très petit, ses multiples successifs ne pourront être distingués. Il peut arriver alors que nous ne puissions distinguer 9A de 10A, ni 10A de 11A, mais 9A de 11A. Ces données brutes peuvent se traduire par la formule :

$$9A = 10A, \quad 10A = 11A ; \quad 9A < 11A.$$

Cette formule, qui caractérise tous les continus physiques, est contradictoire. A ce titre, elle est intolérable. Pour concilier les données de nos sens avec les exigences logiques de notre pensée, trois hypothèses sont de mise :

A. — Nous pouvons supposer que chaque déplacement forme une partie d'un lacet constitué par tous les multiples d'un déplacement beaucoup trop petit pour pouvoir être apprécié. Nous obtiendrons alors un lacet discontinu, qui nous donnera l'illusion d'un continu physique par suite de la grossièreté de nos sens incapables de distinguer deux éléments consécutifs quelconques du lacet. Le groupe des déplacements sera *discontinu*.

B. — Nous pouvons admettre que chaque déplacement forme une partie d'un lacet plus riche. Tous les déplacements qui composent ce lacet seront interchangeables. Deux quelconques d'entre eux seront les multiples d'un autre plus petit, faisant également partie du lacet, qui pourra être considéré comme leur plus grand commun diviseur. Bref, chaque déplacement du lacet pourra être divisé en deux, trois, n parties, dans le sens défini plus haut, et le diviseur fera encore partie du lacet. Les différents déplacements du lacet seront commensurables entre eux ; à chacun d'eux correspondra un nombre commensurable et réciproquement. Ce sera une sorte de continu mathématique, mais incomplet, puisque rien ne correspondra aux nombres incommensurables. Le groupe des déplacements sera *semi-continu*.

C. — Nous pouvons supposer finalement que notre lacet est parfaitement continu. Tous ses déplacements sont interchangeables. Chaque déplacement correspond à un nombre commensurable ou incommensurable, et réciproquement. Le déplacement correspondant au nombre *n a* n'est rien autre que le déplacement correspondant au nombre *a*, répété *n* fois. Le groupe des déplacements sera *continu*.

De ces trois alternatives, c'est la dernière que nous adoptons pour des raisons fort complexes :

1° L'expérience nous a révélé que des déplacements suffisamment grands peuvent être divisés par un nombre quelconque. A mesure que la précision de nos instruments de mesure s'est accrue, cette divisibilité a été vérifiée pour des déplacements beaucoup plus petits, au sujet desquels elle semblait tout d'abord douteuse. Nous avons été conduits alors, par induction, à la présomption que cette divisibilité est une propriété de tous les déplacements, quel que soit leur degré de petitesse, ce qui conduit à rejeter la première alternative en faveur de la troisième.

2° La première alternative, tout comme la seconde, est incompatible avec d'autres propriétés du groupe que nous révèlent d'autres expériences dont il sera parlé plus loin. Le contraire eût pu se produire. Il eût pu arriver que les propriétés du groupe fussent incompatibles avec la continuité ; nous aurions alors sans doute adopté la première solution.

4° Sous-groupes rotatifs. — La propriété formelle la plus importante d'un groupe est de posséder des sous-groupes. Les groupes se distinguent les uns des autres, au point de vue formel, par les sous-groupes qu'ils contiennent et les relations de ces sous-groupes. L'étude théorique du groupe des placements montre qu'il contient

des sous-groupes continus, c'est-à-diré dont tous les déplacements sont divisibles à l'infini ; discontinus, c'est-à-dire qui n'ont pas de déplacements divisibles à l'infini ; mixtes, c'est-à-dire qui ont des déplacements divisibles à l'infini et d'autres qui ne le sont pas. On peut distinguer encore, parmi ces sous groupes, ceux dont les déplacements sont tous interchangeables et qui constituent des lacets et ceux qui ne possèdent pas cette propriété.

D'un autre point de vue, on peut classer les déplacements et les sous-groupes de la manière suivante : considérons deux déplacements A et A' ; soit A'' un troisième déplacement défini comme la résultante du déplacement A' suivi du déplacement A, suivi lui-même de l'inverse du déplacement A' ; ce déplacement A'' est le transformé de A par A'. Au point de vue formel, toutes les transformations du même déplacement sont équivalentes ; par exemple, deux rotations de 60 degrés, deux déplacements hélicoïdaux de même pas et de même fraction de spirale sont équivalents.

Les transformations de tous les déplacements d'un sous-groupe g par le même déplacement A' forme un nouveau sous-groupe qui peut s'appeler le transformé du sous-groupe g par le déplacement A'. Les différentes transformations du même sous-groupe, jouant le même rôle au point de vue formel, sont équivalentes.

Il arrive généralement que plusieurs transformations du même sous-groupe sont identiques. Si elles sont toutes identiques entre elles et avec le sous-groupe primitif, le sous-groupe est dit *invariant*.

Le nombre des sous-groupes du groupe des déplacements est illimité ; mais il en est de remarquables qui ont attiré de suite l'attention, et dont les postulats d'Euclide reviennent à affirmer l'existence. Tels sont les *sous-groupes rotatifs*.

Il existe toute une catégorie de déplacements qui

jouissent de la propriété suivante : en nous faisant passer de l'ensemble des sensation initiales A à d'autres groupes de sensations, ils laissent invariables certaines d'entre elles. Tel est le cas, par exemple, d'un solide qui tourne autour d'un point fixe. Son image est projetée sur notre rétine et chacune des fibres impressionnées du nerf optique nous procure une sensation. Du fait de la rotation du solide, ces sensations varient, mais celles qui correspondent au point fixe restent invariables. Il en sera *a fortiori* de même, si le corps tourne autour d'un axe fixe. Parmi les déplacements, nous sommes ainsi conduits à distinguer ceux qui conservent un certain groupe de sensations (rotations autour d'un point fixe). Ils forment un sous-groupe que l'on appelle *sous-groupe rotatif*. Les transformations de ce sous-groupe forment des sous-groupes rotatifs tous équivalents. Les points de l'espace se trouvent ainsi définis comme les éléments de certains sous-groupes du groupe des déplacements des corps solides. On peut donc définir la notion de point en partant de celles de déplacement et de solide.

Des expériences aussi grossières que la précédente nous apprendraient qu'il existe des déplacements qui laissent fixes deux points quelconques ; que, dans ce cas, ces déplacements laissent fixes une infinité d'autres points (rotation autour d'une droite). C'est ce que l'on exprime analytiquement en disant :

1° Deux sous-groupes rotatifs quelconques possèdent des déplacements communs ;

2° Ces déplacements communs, tous interchangeables entre eux, forment un lacet, appelé *lacet rotatif* (rotations autour d'un axe fixe) ;

3° Chaque lacet rotatif fait partie, non seulement de deux sous-groupes rotatifs, mais d'une infinité d'autres.

Telle est l'origine de la droite, tout comme le sous-groupe rotatif est l'origine de la notion du point.

Considérons tous les déplacements d'un lacet rotatif. Si nous prenons un déplacement quelconque, il ne sera pas, en général, interchangeable avec tous les déplacements du lacet ; mais nous découvrirons qu'il existe des déplacements qui sont interchangeables avec tous ceux du lacet rotatif, et qui forment un sous-groupe plus étendu qu'on appelle le *sous-groupe hélicoïdal* (combinaisons de rotations autour d'un axe et de translations parallèles à cet axe), ce qui paraît évident si l'on observe qu'une droite peut glisser le long d'elle-même.

Finalement, nous pouvons tirer de ces observations les propositions suivantes :

Tout déplacement suffisamment petit, faisant partie d'un sous-groupe rotatif, peut toujours être décomposé en trois autres appartenant respectivement à trois lacets rotatifs donnés. Tout déplacement interchangeable avec un sous-groupe rotatif fait partie de ce sous-groupe.

Tout déplacement suffisamment petit peut toujours être décomposé en deux autres appartenant respectivement à deux sous-groupes rotatifs donnés ou à six lacets rotatifs donnés.

On peut démontrer alors qu'il n'existe pas de groupe discontinu ou semi-continu satisfaisant à ces conditions. Ce sont là les raisons, sur lesquelles nous avions passé silence, qui nous conduisent à considérer le groupe des déplacements comme continu.

5° Nombre de dimensions. — Dans un groupe, on distingue l'ordre et le degré. Dans le cas le plus simple, celui des permutations d'objets, le degré est le nombre des objets, l'ordre est le nombre des permutations. *Le degré est un élément matériel, au lieu que l'ordre est un élément formel :* deux groupes isomorphes peuvent avoir un degré différent, mais leur ordre doit être le même. Ainsi, il existe trois façons de superposer un cube à lui-

même : les sommets peuvent être permutés les uns avec les autres, de même les faces et les angles. Il en résulte trois groupes de permutations, isomorphes entre eux, et dont les degrés sont respectivement 8, 6, et 12, puisqu'il y a huit sommets, six faces et douze arêtes.

Quand on passe aux groupes continus, les définitions précédentes doivent être modifiées. L'objet des opérations de ces groupes est un ensemble de variables continues x_1, x_2, x_n, appelées coordonnées. Toute opération effectuée sur les variables peut être considérée comme formant partie d'un lacet analogue au lacet rotatif et comme un multiple, d'un ordre très élevé, d'une opération infinitésimale appartenant à ce lacet. Chaque opération infinitésimale du groupe peut alors être décomposée en K autres opérations élémentaires, appartenant à K lacets donnés. Le nombre n des coordonnées est le degré, le nombre K des composantes d'une opération infinitésimale est l'ordre d'un groupe continu. Deux groupes continus isomorphes peuvent avoir différents degrés, mais ils doivent posséder le même ordre. Un déplacement infinitésimal pouvant toujours être décomposé en six mouvements élémentaires indépendants, le groupe des déplacements est d'ordre six. Il convient maintenant d'en déterminer le degré.

Les déplacements, comme nous l'avons vu, correspondent à des changements de sensations. Si l'on distingue, dans le groupe qu'ils forment, la forme et la matière, celle-ci sera constituée par nos sensations mêmes. Suppose-t-on l'espace sensible déjà élaboré, la matière sera représentée par autant de variables continues qu'il y a de fibres nerveuses. Le degré de notre groupe sera extrêmement élevé ; l'espace n'aura pas trois dimensions, mais autant de dimensions que nous avons de fibres nerveuses. Pour éviter une pareille complication, il faut remplacer le groupe que nous fournissent les données

brutes de l'expérience, par un groupe isomorphe, dont la matière soit plus simple.

Nous y parvenons grâce à cette circonstance : les déplacements, qui conservent certains éléments, sont les mêmes que ceux qui conservent certains autres éléments. Alors, tous les éléments conservés par les mêmes déplacements peuvent être remplacés par un élément unique, qui a une valeur purement schématique. Il en résulte une réduction considérable du nombre des degrés. Par exemple, un solide tourne autour d'un point peint en rouge ; quelque temps après, un second solide tourne autour d'un point peint en vert. Dans le premier cas, ce que je percois comme invariable dans le déplacement, c'est la sensation de rouge procurée par une certaine fibre nerveuse ; dans le second, c'est la sentation de vert. Ces deux sentations sont radicalement hétérogènes, mais je constate que le déplacement est le même dans les deux cas, parce qu'il peut être corrigé par le même changement interne. Les deux sensations de rouge et de vert, matériellement différentes, peuvent alors être remplacées par un élément unique que j'appelle point, et je traduis mes sensations en disant que, dans l'un et l'autre cas, un point reste fixe. Chacun de ces nouveaux éléments sera conservé par tous les déplacements d'un sous-groupe rotatif, chaque sous-groupe rotatif correspondant à un élément et réciproquement.

Considérons maintenant les différentes transformations du même sous-groupe. Elles sont infinies en nombre et peuvent former une simple, double, triple infinité continue. A chacune de ces transformations correspondra schématiquement un certain élément. Nous obtiendrons ainsi une simple, double, triple infinité d'éléments et le degré de notre groupe continu sera, suivant les cas, 1, 2, 3...

Supposons que nous choisissions les différentes transformations d'un sous-groupe rotatif. La matière de notre

groupe sera constituée par une triple infinité d'éléments et son degré sera 3. Nous aurons alors choisi le point comme élément de l'espace et donné à l'espace trois dimensions.

Supposons que nous choisissions les différentes transformations d'un sous-groupe hélicoïdal. La matière de notre groupe sera composée d'une quadruple infinité d'éléments et son degré sera 4. Nous aurons choisi la droite comme élément de l'espace et nous aurons donné à l'espace quatre dimensions.

Supposons, enfin, que nous choisissions les différentes transformations d'un lacet rotatif. Le degré sera 5. Nous aurons choisi comme élément de l'espace la figure formée par une ligne droite et un point sur cette droite, et nous aurons donné cinq dimensions à l'espace.

Ces trois solutions sont également possibles, et l'on ne peut se déterminer en faveur de l'une d'elles qu'en vertu d'une convention, qui n'est ni vraie ni fausse, mais plus ou moins commode. Les raisons que nous avons de choisir la première sont les suivantes :

1° C'est mathématiquement la plus simple, puisqu'elle conduit à attribuer à l'espace le moins grand nombre de dimensions.

2° Psychologiquement, le sous-groupe rotatif est connu avant les deux autres. Le sous-groupe hélicoïdal est connu seulement après et indirectement. Le lacet rotatif est un simple sous-groupe du groupe rotatif.

3° A cela se joignent des raisons d'ordre physique. Le géomètre est parfaitement libre de prendre pour élément générateur de l'espace celui qui lui convient ; le point, la droite, la sphère, le cône, etc. ; mais le physicien envisage un corps comme un système de points auxquels s'appliquent des forces. D'une manière générale, les propriétés des corps ne dépendent que de leurs points. Il n'importe pas, par exemple, pour les propriétés d'un corps, qu'il ait

ou non des plans tangents communs avec Mars, Jupiter et le Soleil.

6° LE GROUPE MÉTRIQUE D'EUCLIDE. — Les propositions précédentes une fois admises, notre choix se trouve limité aux trois groupes métriques d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann. Choisir le groupe d'Euclide, c'est, comme nous l'avons déjà dit, admettre que le groupe des déplacements possède un sous-groupe invariant, dont tous les changements sont interchangeables, et qui est formé de toutes les translations.

Les raisons d'admettre la géométrie d'Euclide sont les suivantes :

1° Le groupe euclidien est mathématiquement le plus simple, parce que certains de ses déplacement sont interchangeables entre eux, ce qui n'est pas vrai des déplacement des groupes non-euclidiens. Traduit en langage analytique, cela veut dire qu'il y a moins de termes dans les équations euclidiennes : le groupe euclidien est donc plus simple que les autres groupes, de la même façon qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré et les formules de la trigonométrie rectiligne que les formules de la trigonométrie sphérique. Cette considération est d'un grand poids, la science étant à sa façon un problème de minimum. L'économie de la pensée importe avant tout. Or, les géométries non-euclidiennes font appel aux théories les plus élevées de l'analyse, aux fonctions fuchsiennes par exemple. On peut dès lors pressentir quelles complications entraîneraient une mécanique et une physique constituées à l'aide d'une métrique non-euclidienne. Il n'y aurait cependant aucune impossibilité théorique à cela, comme le montrent les différents travaux publiés sur ce sujet.

2° Le groupe euclidien est pratiquement le seul utilisable, parce que les solides naturels avec lesquels nous con-

struisons des instruments de mesure, en particulier nos membres et notre œil, se comportent sensiblement, dans leurs déplacements, comme des solides euclidiens. C'est ce que nous apprennent les expériences cinématiques relatives à la translation des solides naturels.

III. Résumé et Conclusion.

Nous pouvons résumer les considérations précédentes de la façon suivante. L'analyste a dans l'esprit la notion de plusieurs groupes, dont il connaît théoriquement les propriétés. Parmi tous les changements de l'univers, l'expérience lui révèle une classe remarquable, la classe des déplacements. Les déplacements forment un groupe et ont les propriétés d'un continu physique. Pour traduire analytiquement ce résultat et faire cesser la contradiction intolérable qu'entraîne la loi de Weber, la loi de tous les continus physiques, l'analyste peut choisir un groupe discontinu, semi-continu ou continu, comme *groupe fondamental*. Ce sont des raisons d'ordre expérimental qui le conduisent à choisir un groupe continu G, d'ordre six et de degré indéterminé, appelé *groupe des déplacements*. Parmi tous les groupes isomorphes à G, il choisit, pour des raisons de simple commodité, le *sous-groupe rotatif*, comme *groupe spatial*, de préférence au sous-groupe hélicoïdal et au lacet rotatif également possibles. Le groupe spatial lui-même est métriquement indéterminé et les axiomes de Lie montrent qu'il est possible de choisir entre trois groupes. L'analyste choisit, comme *groupe métrique*, le *groupe euclidien*, pour des raisons de simplicité mathématique et de commodité pratique.

Les expériences qui conduisent à la notion de déplacement et à celle de corps solide étaient indispensables à l'esprit humain pour créer la géométrie. C'est l'existence des solides naturels qui conduit le savant à étudier un

certain groupe fondamental particulièrement, remarquable mais encore très indéterminé. A chaque nouveau degré de détermination, l'analyste a choix entre plusieurs alternatives possibles. L'expérience ne lui impose pas le choix qu'il fait, mais elle le lui suggère, en lui montrant que c'est le plus commode. La géométrie apparaît, dès lors, comme le fruit inconscient d'un opportunisme empirique.

Que l'on n'aille pas dire qu'il en est ainsi de n'importe quelle loi physique. Une fois adoptés le langage et les procédés de mesure qui permettent d'énoncer et de vérifier une loi physique, celle-là est nécessairement vraie ou fausse aux erreurs près d'observation. Elle est déterminée univoquement par l'expérience. Tel n'est pas le cas des théorèmes de la géométrie.

Non seulement les faits expérimentaux, qui sont l'occasion de les énoncer, sont approximatifs, alors que les théorèmes géométriques sont infiniment précis et soustraits à toute revision, mais encore l'expérience ne les vérifie pas toujours. Par exemple, si un corps va de A en B, il n'est pas toujours vrai qu'un transfert corrélatif de notre corps, de A en B, restaure nos sensations primitives. Dans ce cas, on s'en prend au solide qui s'est déplacé : on l'accuse d'avoir subi un changement d'état appréciable. « Ces coups de pouce sont légitimes, dit Poincaré, mais ils suffisent pour nous avertir que les propriétés de l'espace ne sont pas des vérités expérimentales proprement dites. Si nous avions voulu vérifier d'autres lois, nous aurions pu aussi y parvenir, en donnant d'autres coups de pouce analogues [1]. »

La raison de cette différence entre les lois physiques et les théorèmes géométriques est celle que nous avons dénoncée dans un précédent paragraphe : les expériences

[1] *V. S.*, p. 125.

qui ont été pour nous l'occasion de créer la géométrie sont des expériences de cinématique, d'optique et de physiologie, non des expériences proprement spatiales. Dès lors, nous sommes dans le cas d'un témoin indirect : s'il est convaincu de fausseté, il mettra l'erreur reprochée sur le compte du témoin direct dont il s'est fait le porte-parole ; cela; sans que jamais sa bonne foi puisse être suspectée.

On peut encore s'exprimer d'une autre manière. Il y a deux choses dans la science : la matière et la forme, ce qu'elle énonce et le langage dans lequel elle l'énonce. L'expérience dans les sciences de la nature nous impose la matière de la science ; elle ne nous impose jamais le langage dans lequel on l'exprime. Le langage de la science peut être indéfiniment diversifié ; les lois naturelles, qui en constituent le contenu, resteront invariables. Si l'on passe d'un langage dans un autre à l'aide d'un dictionnaire approprié, les lois apparaîtront comme un invariant de la traduction ainsi opérée.

A quel critère reconnaîtra-t-on, dès lors, qu'une énonciation se rapporte à la forme de la science plutôt qu'à sa matière ? A ce que l'adoption de l'énonciation contraire *n'eût pas été moins bonne*. Appliquons ce critère aux axiomes de la géométrie ordinaire. On voit qu'ils se rapportent à la forme des sciences de la nature : ils fixent le langage dans lequel on convient de traduire les lois physiques. Ils définissent ce que l'on convient d'appeler élément de l'espace, forme, distance, droite, plan, figures égales, déplacements sans déformation. D'autres définitions auraient pu prévaloir, qui équivaudraient à rejeter le postulat d'Euclide ou à attribuer un nombre différent de dimensions à l'espace. Nous avons déjà vu qu'elles n'auraient pas été moins bonnes en ce qui concerne le postulatum, c'est-à-dire que les lois physiques peuvent s'énoncer en langage non-euclidien ; en ce qui concerne

l'axiome des trois dimensions, Poincaré a consacré son dernier article philosophique [1] à montrer que les lois de la physique pourraient s'exprimer en attribuant quatre dimensions à l'espace. Adopter la géométrie ordinaire, c'est, au même titre que le choix d'un système de mesures, d'un type d'instruments, d'une analyse vectorielle, élire un langage parmi d'autres possibles. Une fois ces conventions posées, les faits que la physique exprime ne peuvent plus être que vrais ou faux.

Nous sommes dès lors à même de répondre au problème épistémologique posé au début du paragraphe précédent : quelle est la nature des axiomes de la géométrie ordinaire ? Sont-ils des vérités empiriques, des vérités rationnelles, ou de simples conventions?

Nous pouvons répondre que ce sont de simples conventions. Ce sont des conventions facultatives, mais ce ne sont pas des conventions arbitraires : *ce sont des conventions commodes, justifiées par l'expérience.*

Comme il existe différentes sortes de conventions, il convient d'examiner comment se répartissent entre elles les différentes sortes d'axiomes.

Les axiomes peuvent se rapporter, soit à la forme du groupe métrique euclidien, soit à sa matière. Les premiers sont des *conventions nominales*, c'est-à-dire des *définitions déguisées.* Seulement ce sont les définitions d'une sorte particulière. Ils ne caractérisent qu'équivoquement les objets auxquels on a coutume de les appliquer, puisqu'ils sont vrais d'une foule d'objets différents. Ce qu'ils définissent univoquement, est quelque chose de purement formel : ils définissent la *structure d'un groupe, du groupe métrique euclidien.*

L'axiome des trois dimensions est d'une autre sorte. Il est d'ordre purement matériel. C'est la *matière* du groupe

[1] *L'Espace et ses trois dimensions*, ap. *R. M. M.*, juillet 1912, p. 483-504.

des déplacements qu'il détermine, en spécifiant que ce groupe s'applique à une variété numérique à trois dimensions. Il revient à choisir une certaine interprétation possible du groupe des déplacements. C'est une *convention d'interprétation*, choisie, pour des raisons de commodité, entre plusieurs autres possibles.

Enfin, nous avons vu qu'il existe des solides naturels dont les déplacements se comportent approximativement comme les substitutions du groupe euclidien. Admettre les axiomes métriques d'Euclide, c'est alors choisir ces solides comme instruments pour mesurer l'espace, et, par suite, pour appliquer les mathématiques à la physique. En ce sens, on peut dire que les axiomes métriques sont des *conventions instrumentales*.

CHAPITRE VII

LA GÉOMÉTRIE ET LE KANTISME

I. L'incompatibilité des géométries non-euclidiennes avec Le Kantisme.

Les géométries non-euclidiennes n'ont pas seulement pour intérêt de montrer, par un exemple topique, que l'expérience ne conditionne pas univoquement la représentation schématique et conceptuelle que la science donne de l'Univers : qu'il n'y a pas entre la nature et l'esprit « unité de détermination », *adæquatio rei et intellectus*, selon la vieille formule scolastique. Elles comportent cette conséquence philosophique capitale, nettement formulée par Poincaré : elles constituent un réquisitoire accablant contre le Kantisme.

Tour à tour, Gauss, Helmholtz, Poincaré ont explicitement dénoncé l'incompatibilité de la pangéométrie avec la théorie criticiste. Pour Kant, les axiomes de la géométrie euclidienne sont des principes synthétiques *a priori* qui s'imposent apodictiquement à notre esprit en vertu d'une forme *a priori* de la sensibilité; pour Gauss, ce sont des vérités empiriques qui résultent de la détermination expérimentale d'une certaine *constante spatiale ;* pour Helmholtz, ce sont des lois cinématiques ; pour Poincaré, ce sont des conventions commodes suggérées par l'expérience. Pour Kant, la géométrie d'Euclide est imposée par notre intuition de l'espace qui dérive de notre nature

d'être sensible; pour les métagéomètres contemporains, les géométries d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann sont trois métriques également susceptibles de s'appliquer à l'espace représentatif qui est amorphe.

Aussi est-il surprenant que, dans son travail classique sur *la Philosophie des mathématiques de Kant*[1], — qui célèbre le crépuscule d'une idole plutôt qu'il commémore un anniversaire, — Couturat ait totalement négligé une source de critiques si précieuse. Il est plus étonnant de le voir insinuer à la fin de son mémoire que les géométries non-euclidiennes tourneraient plutôt à la justification du criticisme qu'à sa confusion : « Quoi qu'il en soit, tandis que l'Arithmétique dément la théorie kantienne, c'est dans la Géométrie que cette théorie a le plus de chances de subsister. Ce résultat est contraire à l'opinion d'un grand nombre de mathématiciens, qui prétendent que l'invention des géométries non-euclidiennes a réfuté la doctrine de Kant ; ces auteurs, apparemment peu familiers avec la pensée de Kant, croient que sa doctrine implique qu'il n'y ait qu'une géométrie logiquement possible, ce qui est faux ; l'existence de plusieurs géométries possibles est bien plutôt un argument en faveur de la thèse kantienne, que les jugements géométriques sont synthétiques et fondés sur l'intuition. M. Russell a vu beaucoup plus juste en disant que ce qui a ruiné la philosophie kantienne des mathématiques, ce n'est pas la géométrie non-euclidienne, mais la reconstitution logique de l'Analyse, ce que M. Klein a appelé l'*arithmétisation des mathématiques*[1]. » Il n'est pas déplacé de revenir sur ce jugement provisoire du grand logicien, et de compléter sa critique, en utilisant les arguments qu'il a laissés pour compte.

L'histoire des géométries non-euclidiennes dans ses

[1] *R. M. M.*, mai 1904 ; reproduit dans *les Principes des Mathématiques*, Paris, 1905.

[1] *Les principes des Mathématiques*, p. 300-301.

rapports avec le Kantisme peut se décomposer en trois périodes. Dans la première, les Kantiens, Land, Krause et Becker, soutiennent que les métriques non-euclidiennes sont des constructions logiques, incapables de s'accompagner d'intuition, si bien que la géométrie d'Euclide garde son privilège d'être la seule forme d'extériorité qui s'impose à notre sensibilité comme condition *a priori* de l'expérience; dans la seconde, les néo-Kantiens, Lotze, Renouvier, Hannequin attaquent la validité des géométries non-euclidiennes au nom de la logique et de l'expérience; enfin, dans la troisième, M. Russell fait des concessions à l'empirisme pour sauvegarder l'idée fondamentale de la théorie criticiste sous une forme remaniée.

Nous étudierons successivement la position de Poincaré en face de ces trois moments du développement de la philosophie géométrique du Criticisme.

II. L'imaginabilité des géométries non-euclidiennes.

Tout d'abord, on serait tenté d'argumenter ainsi contre Kant : vous dites que les principes de la géométrie sont des jugements synthétiques *a priori*, parce qu'ils sont apodictiques ; mais s'ils sont apodictiques, ils s'imposent nécessairement à notre entendement, et on ne saurait concevoir d'autres géométries, logiquement possibles, que celle d'Euclide. A raisonner ainsi, nous commettrions la méprise que dénonçait plus haut Couturat. Nous oublierions qu'apodictique n'a pas chez Kant le sens traditionnel, consacré par l'autorité d'Aristote et des Rationalistes de tous les temps. Il ne s'entend pas de ce qui s'impose nécessairement à notre pensée, parce que le contraire est contradictoire : il se dit de ce qui s'accompagne d'une évidence intuitive telle que nous ne saurions en douter. Le Kantisme est alors très compatible avec l'existence de géométries autres que celle d'Euclide, *à condition qu'elles*

ne s'accompagnent pas d'intuition. S'il en était autrement, les axiomes de la géométrie ordinaire ne seraient pas des conditions *a priori* de l'expérience, puisque d'autres axiomes seraient susceptibles de s'appliquer à la matière de l'intuition. Pour que les géométries non-euclidiennes tournent contre le Kantisme, il faut que les lignes, les surfaces et les solides non-euclidiens soient susceptibles d'être représentés au même titre que ceux d'Euclide.

Or, précisément, en lisant les mémoires de Lobatchefski et de Bolyaï, un Kantien n'avait pas grand motif de s'alarmer. Les géométries non-euclidiennes apparaissent dans ces travaux comme des constructions purement conceptuelles, dont on n'est pas pertinemment sûr qu'elles ne soient pas contradictoires, qui ne s'accompagnent d'aucune représentation figurative adéquate. On n'y voit pas ce que sont une droite, un plan, un solide lobatchefskiens. En présence de la géométrie nouvelle, les Criticistes étaient fondés à déclarer : « Les axiomes de la géométrie non-euclidienne sont des propositions synthétiques comme tous les jugements mathématiques : leurs contraires n'impliquent donc pas contradiction. C'est pourquoi la géométrie non-euclidienne est logiquement concevable. Mais les axiomes de la géométrie d'Euclide sont seuls apodictiques, parce que seuls les objets sur lesquels ils portent peuvent s'accompagner d'intuition. » Voilà ce que soutenaient Land, Krause et Becker à l'époque où Helmholtz allait entreprendre de les attaquer ; voilà ce que n'ont cessé de répéter depuis les Néo-criticistes comme Renouvier[1] et Natorp[2], et, exception faite du postulat d'Euclide, M. Russell[3] de nos jours.

[1] Renouvier, *Philosophie de la règle et du compas*, ap. *Critique philosophique*, novembre 1889.

[2] P. Natorp, *Die logischen Grundlagen der exacten Wissenschaften*, 1900.

[3] B. Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, 1897.

C'est contre cette prétention que s'insurge le fondateur de l'*Optique physiologique*[1]. Il estime que les géométries non-euclidiennes sont parfaitement imaginables et il pose à ce sujet une définition remarquable de l'imaginabilité (*Vorstellbarkeit*) : « C'est la possibiliié de se représenter complètement les impressions sensorielles que l'objet exciterait en nous d'après les lois connues de nos organes des sens, sous toutes les conditions d'observation concevables[2]. » Il ajoute, en guise de critérium : « Lorsque la série des impressions sensibles peut être donnée d'une manière complète et univoque, on doit reconnaître que la chose peut être *représentée intuitivement*[3]. »

Bornons-nous d'abord à la géométrie à deux dimensions. Quel est le sens de cette proposition : peut-on se représenter intuitivement les planimétries non-euclidiennes ? Ces planimétries diffèrent de celle d'Euclide par les définitions qu'elles donnent de la distance de deux points, de la ligne droite et du plan. *A priori*, on ne sait pas s'il existe des lignes et des surfaces *représentables*, qui répondent à ces définitions. Prouver qu'il y en a, c'est précisement affimer que ces planimétries peuvent s'accompagner d'intuition. C'est ce qu'a fait Beltrami, lorsqu'il a montré que la droite et le plan lobatchefskiens sont représentés sur une région circonscrite d'une pseudosphère, de même que la droite et le plan riemanniens sont identifiables à une sphère et à ses grands cercles.

Helmholtz, s'inspirant de la découverte de Beltrami, montre comment des êtres intelligents seraient amenés à construire une planimétrie riemannienne ou lobatchefskienne, sans avoir l'intuition du plan euclidien. Il

[1] Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. II, p. 640 et suiv.; *Vorträge und Reden*, t. II, p. 1 et suiv., 356 et suiv , 610-660; *Populärwissenschaftliche Vorträge*, Heft 3, p. 21-54.

[2] *Wiss. Abhandl.*, Bd. II, p. 644.

[3] *Vorträge u. Reden*, Bd. II, p. 234.

suppose, à cet effet, des êtres infiniment plats, vivant à la surface d'une sphère. Le ligne la plus courte d'un point à un autre est pour eux l'arc de grand cercle compris entre ces points : ce sera leur droite. Ils constateront qu'il existe un couple de points conjugués par lesquels passe une infinité de droites. Par un point pris hors d'une droite, il leur sera impossible de mener une autre droite qui ne rencontre pas la première. La notion de parallélisme leur échappera, celle de similitude également. Par contre, ils pourront démontrer l'égalité de deux figures par superposition. Ces êtres adopteront la planimétrie riemannienne.

Transportons, à nouveau, nos êtres plats sur une pseudosphère et enfermons-les dans une région comprise entre deux arêtes de rebroussement. Par un point pris hors d'une géodésique, qu'ils appelleront droite, ils constateront qu'on peut toujours mener un faisceau de droites qui ne coupent pas la première : ils adopteront la planimétrie lobatchefskienne à deux dimensions.

Supposons qu'un de leurs géomètres ait rejeté le postulat de Lobatchefski pour le remplacer par celui d'Euclide. La nouvelle planimétrie ainsi obtenue paraîtra purement conceptuelle et incapable de s'accompagner d'intuition, si bien que les postulats de la géométrie plane de Lobatchefski seront tenus pour seuls apodictiquement vrais. Si, alors, de hardis pionniers venaient un jour à découvrir sur la pseudosphère une surface plane, en une région inexplorée, qu'elle serait leur stupéfaction ? Sur cette surface, la planimétrie non-lobatchefskienne se trouverait réalisée. Les pseudosphériens se trouveraient dans la même situation que nous, une fois que Beltrami eut découvert les propriétés des pseudosphères. Leur kantisme, comme le nôtre, se trouverait fort ébranlé. A partir de ce moment, les philosophes de la pseudosphère ne manqueraient pas d'agiter la question de savoir quelle est

la vraie géométrie de l'Univers, jusqu'au jour où un nouveau Poincaré viendrait leur dire : « Ne passez-vous pas votre temps en de vaines disputes. Le plan euclidien n'est-il pas semblable à l'horisphère lobatchefskienne ; le plan hyperbolique n'est-il pas semblable aux surfaces euclidiennes à courbure constante négative ? Dès lors vos deux géométries sont deux métriques qui, partant de définitions différentes, sont également susceptibles de s'appliquer à notre Univers. On ne peut pas dire que l'une soit plus vraie que l'autre. Notre métrique lobatchefskienne est cependant plus commode, parce qu'elle est conforme à nos anciennes habitudes, et aussi parce que les segments de surface qui nous servent à construire des instruments de mesure se comportent à la façon des figures planes indéformables de Lobatchefski. »

Helmholtz n'a pas seulement vulgarisé, sous la forme suggestive des allégories du Pays plat, les résultats de Beltrami ; il a montré comment l'espace non-euclidien est représentable. Que doit-on d'abord entendre par ces mots : l'espace non-euclidien est représentable ?

L'espace est un continuum amorphe qui n'est pas capable d'être imaginé. Seuls les corps qui le remplissent lui donnent une forme par métaphore. Pour étudier métriquement ces corps, il faut les superposer. Cela n'est possible que si les déplacements qu'on leur fait subir les laissent indéformables, c'est-à-dire si les distances de tous les couples de points qui les composent restent *invariables*. Mais ce que les trois géométries appellent distance de deux points, *c'est quelque chose de différent pour chacune des trois géométries* : par conséquent, les définitions qu'elles donneront du mouvement d'un corps indéformable, seront *trois définitions différentes*. Un corps indéformable pour un Euclidien, c'est-à-dire tel que les droites euclidiennes restent des droites euclidiennes dans les mouvements qu'il subit, apparaîtra

comme un corps déformable pour un géomètre lobatchefskien, parce que les droites hyperboliques ne demeurent pas des droites hyperboliques, et réciproquement[1]. Dès lors, cette proposition : « Peut-on s'imaginer l'espace non-euclidien ? » revient à celle-ci : « Peut-on s'imaginer les déplacements sans déformation des solides non-euclidiens » ? A cette question, Helmholtz et Poincaré ont répondu que oui.

On peut d'abord se demander comment apparaîtraient les phénomènes d'un monde lobatchefskien pour un observateur dont l'éducation visuelle se serait formée dans notre univers. Pour cela, plaçons devant nos yeux une grande loupe convexe, à distance focale négative, d'une dizaine de mètres environ. Cette lentille rapprochera les objets et mettra les plus éloignés à la distance focale de la loupe. De tous côtés, où que nous nous tournions, le champ de notre vue s'arrêtera à une dizaine de mètres. Si nous avançons pour saisir un objet, nous le verrons s'étendre devant nous plus en profondeur qu'en surface ; derrière nous, par contre, il se contractera. Si nous fixons deux lignes droites — deux rayons lumineux, par exemple, — nous les verrons s'écarter d'autant plus que nous avancerons davantage ; derrière nous, ils sembleront vouloir se rejoindre. Nous serons dans un univers lobatchefskien.

Mettons à nouveau devant nos yeux un verre faiblement prismatique, dont la base soit tournée vers le sol ; nous assisterons aux apparences inverses. Les objets nous paraîtront plus grands et plus éloignés qu'ils ne sont en réalité ; et, pour les fixer, il faudra faire diverger les axes de nos yeux. Toutes nos lignes de vision paraîtront venir se rejoindre derrière notre tête, qui deviendra, à elle seule, le fond de toute perspective. Nous serons dans un univers riemannien.

[1] Cf. *V. S.*, p. 62.

Helmholtz conclut de là que nous avons « la faculté d'imaginer la série entière des impressions sensorielles que nous éprouverions dans des mondes non-euclidiens, en suivant la route tracée par les lois connues de nos perceptions sensorielles ». Ce résultat ruine la thèse des Criticistes.

Pouvons-nous, maintenant, imaginer un monde dont les habitants seraient naturellement conduits à adopter la géométrie non-euclidienne à trois dimensions? Remarquons bien ce que la question comporte.

Pour les habitants d'un tel monde, la droite lobatchefskienne devra assumer les mêmes fonctions physiques que la droite euclidienne dans notre univers : elle devra être le plus court chemin d'un point à un autre, l'axe de rotation des corps solides, la trajectoire des rayons lumineux. A la question ainsi précisée, Poincaré, utilisant la première interprétation euclidienne de la métrique lobatchefskienne, répond par un mythe célèbre[1].

Imaginons, à l'intérieur d'une sphère S, un monde présentant les particularités suivantes. Tous les objets qui le peuplent ont le même coefficient de dilatation et sont animés de mouvements suffisamment lents pour se mettre immédiatement en équilibre thermique avec le milieu qui les entoure. La température est maxima au centre et se réduit au zéro absolu à la périphérie. Si l'on désigne par R le rayon de la sphère et par r la distance d'un point intérieur au centre, la température absolue en ce point sera mesurée par $R^2 - r^2$, et l'indice de réfraction par l'inverse de ce rapport.

Les habitants de ce monde singulier le tiendront pour infini. En effet, plus ils avanceront vers la périphérie, plus leurs pas deviendront petits, puisqu'ils se contracteront

[1] *S. H.*, p. 83-88.

sous l'action du froid, si bien qu'ils ne parviendront jamais à l'atteindre. Plus ils se rapprocheront du centre, au contraire, plus ils gagneront de terrain à chaque enjambée, puisqu'ils se dilateront à mesure sous l'action croissante de la chaleur. Le plus court chemin entre deux points, celui nécessitant le nombre le plus petit de pas, ne sera plus, comme on peut le prévoir, la droite euclidienne qui joint ces deux points, mais une courbe renflée vers le centre : l'arc du cercle, passant par ces deux points, qui coupe orthogonalement la sphère S. On peut vérifier que cette courbe, en raison des hypothèses énoncées, sera l'axe de rotation des solides qui pivotent entre ces deux points et la trajectoire des rayons lumineux allant de l'un à l'autre: ce sera la droite physique de ce monde. Par un point pris hors d'une droite, on pourra mener, non plus une seule, mais une infinité de parallèles à cette droite, et la somme des angles d'un triangle sera inférieure à deux droits. Les habitants de cet univers ne construiront pas la géométrie d'Euclide, mais celle de Lobatchefski.

Faisons l'hypothèse contraire. Supposons un monde formé de couches concentriques, où la chaleur irait en croissant indéfiniment à partir du centre. Les phénomènes inverses vont se présenter. Par un point pris hors d'une droite, on ne pourra mener aucune parallèle à cette droite ; deux points ne détermineront plus toujours univoquement une droite et la somme des angles d'un triangle sera supérieure à deux droits. Ce n'est plus la géométrie de Lobatchefski qu'on sera conduit à élire, c'est celle de Riemann.

Supposons que, dans l'univers lobatchefskien décrit par Poincaré, on introduise des corps dont la dilatation soit négligeable, c'est-à-dire qui se comportent comme les *solides euclidiens*. Les géomètres de ce monde hyperbolique pourront s'en servir pour faire des mesures : ils pourront alors adopter pratiquement la métrique eucli-

dienne. Seraient-ils fondés alors à dire que cette métrique nouvelle est fausse et l'ancienne vraie ? Assurément non. Les deux métriques se prêteront également à l'étude des phénomènes physiques de leur univers. Mais la géométrie d'Euclide leur paraîtra toujours paradoxale, parce qu'elle bouleversera leurs idées sur la mesure du continu physique et parce que les solides euclidiens resteront l'infime exception. Ce seront les solides lobatchefskiens, leurs corps en particulier, qu'ils continueront à considérer comme véritablement indéformables. Lorsqu'ils transporteront un solide euclidien, c'est ce solide, et non leur propre corps, qui leur semblera varier de forme. Ils préféreront donc la géométrie lobatchefskienne à celle d'Euclide, parce qu'elle correspondra aux propriétés des corps les plus remarquables de leur univers, en particulier à celles de leurs membres qu'ils utiliseront spontanément pour faire des mesures. Il en serait autrement pour nous, dont l'éducation a été faite dans un monde euclidien. Transportés brusquement dans l'univers lobatchefskien, nous trouverions plus simple de ne pas changer nos habitudes et de décrire les phénomènes dans le langage de la géométrie ordinaire[1]. Les solides hyperboliques nous apparaîtraient comme des corps qui se déforment dans leurs mouvements, et la traduction euclidienne de ces mouvements serait seulement plus compliquée que pour les géomètres lobatchefskiens, puisqu'ils ne seraient plus des déplacements sans déformation. Inversement, si ces géomètres étaient transportés chez nous, ils seraient amenés à rendre compte des phénomènes physiques de notre univers à l'aide de leur métrique non-euclidienne.

Le mythe physique de Poincaré est riche d'enseignements philosophiques. Contre les Rationalistes, il montre que les vérités réputées *a priori*, éternelles et

[1] *S. H.*, p. 91.

inconditionnellement nécessaires, dépendent des contingences empiriques du milieu qui nous sert d'habitat[1]. En effet, quelle est la proposition que Descartes, Bossuet, Malebranche s'accordent à citer le plus volontiers comme exemple probant de vérité rationnelle? C'est le théorème bien connu : *la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.* Or, dans l'univers non-euclidien, si l'on désigne du nom de droites les droites hyperboliques, ce théorème est faux ; il est remplacé par cet autre : *la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits.* D'où vient la différence de ces deux énoncés contradictoires? De ce que le coefficient de dilatation des corps solides, l'établissement de l'équilibre thermique et la répartition de la chaleur sont autres dans le monde euclidien et dans le monde lobatchefskien ; ou, pour parler le langage des géomètres non-euclidiens pour qui la notion de chaleur n'existe pas, de ce que la structure des solides naturels est différente dans ces deux univers. Contre les Criticistes, le mythe de Poincaré établit que la géométrie d'Euclide n'est pas seule à s'accompagner d'intuition : « Dans le monde non-euclidien, nos sensations seraient composées des mêmes éléments que dans notre monde actuel, mais ces éléments s'associeraient et se succéderaient suivant d'autres lois. On peut donc parfaitement décrire ce monde non-euclidien, non en termes conceptuels, mais en composant un tableau nouveau avec des éléments connus. Je crois que c'est ce qu'Helmholtz a voulu faire ; je suis sûr que c'est ce que j'ai voulu faire, et je crois y avoir réussi[2]. » En ce sens, on peut conclure, contrairement à l'opinion de Couturat, que les géométries non-euclidiennes constituent bel et bien une mise à pied du Kantisme.

[1] Comp. L. Rougier, *les Paralogismes du Rationalisme*, chap. x.

[2] H. Poincaré, *Des fondements de la Géométrie*, ap. *R. M. M.*, mai 1889, p. 275-276.

III. Réfutation des arguments néo-criticistes.

Non seulement Poincaré rejette explicitement la théorie criticiste, mais l'on peut trouver, dans les divers développements de sa pensée, la matière d'une réfutation des critiques adressées par les néo-Kantiens contre la validité des géométries non-euclidiennes.

Ces critiques, que l'on trouve chez Lotze, Renouvier et Hannequin, reposent sur une connaissance technique insuffisante des géométries non-euclidiennes et sur une tendance réaliste à appliquer à l'espace en soi ce qui n'est vrai que des métriques qu'on utilise pour le géométrer.

1° Certains interprètent l'expression malencontreuse de Riemann : « courbure de l'espace en un point », comme signifiant que les espaces non-euclidiens sont des espaces courbes plongés dans un espace euclidien à quatre dimensions, de même que la courbure d'une ligne implique le recours à la droite euclidienne. Ainsi les métriques de Lobatchefski et de Riemann seraient nécessairement subordonnées à celle d'Euclide et n'auraient de sens que par elle. Cette thèse a été formulée par Renouvier[1] et Hannequin[2]. Elle repose sur la double méconnaissance des recherches de Gauss et de celles de Riemann. Le premier a formulé un théorème qui permet de donner une définition intrinsèque soit de la courbure totale, soit de la courbure en un point d'une surface et d'une ligne, sans recourir à la droite euclidienne et à la troisième dimension. Le second, dans son *Habilitationschrift*, a généralisé le théorème de Gauss en fournissant de la courbure de l'espace en un point une définition

[1] Renouvier, *Philosophie de la règle et du compas*, ap. *Critique philosophique, nov.* 1889, *p.* 337 *et suiv.*

[2] Hannequin, *Etudes d'histoire des Sciences et d'histoire de la Philosophie*, 1908, p. 87-101.

intrinsèque qui permet de s'affranchir de la quatrième dimension.

2° Toujours comme suite de l'équivoque créée par l'expression de Riemann, Lotze, Renouvier, Hannequin et Newcombe se figurent les espaces non-euclidiens comme doués d'une vertu plastique, d'une action déformatrice qui imposerait une certaine courbure définie K à tous les corps qui y sont plongés : « Plusieurs personnes, écrit Poincaré, sont allées jusqu'à douter du postulatum, à se demander si l'espace réel est plan, comme le supposait Euclide, ou s'il ne présente pas une légère *courbure*[1]. » Mais alors l'espace cesserait d'être une pure réceptivité ; il serait actif et par suite non homogène. Or, la première condition requise par une métrique est l'homogénéité de l'espace, qui seule permet la libre mobilité des figures : les géométries non-euclidiennes seraient donc contradictoires dans les termes.

L'erreur d'interprétation ici commise tient à ce qu'on rapporte l'expression « courbure d'espace » à l'espace lui-même, au lieu de la rapporter à la façon de mesurer. L'espace considéré en soi, indépendamment de nos instruments de mesure, est *amorphe* : il n'a ni propriétés métriques, ni propriétés projectives, il n'a que des propriétés topologiques[2]. C'est un continuum à trois dimensions, obtenu à l'aide d'une première abstraction à partir du continu sensible primitif fourni par la perception extérieure. Dans ce continuum, on peut tracer un réseau de lignes et de surfaces : les propriétés de ce réseau sont dites improprement et par métaphore les propriétés de l'espace[3]. Par propriétés du réseau, il faut entendre le rapport qui existe entre deux mailles distinctes du réseau. Pour établir ce rapport, il est nécessaire d'amener les

[1] *Journal des Savants*, mai 1902, p. 253.
[2] Cf. *D. P.*, p. 62.
[3] Cf. *V. S.*, p. 59-60.

deux mailles en contact, autrement dit de déplacer l'une jusqu'à ce qu'elle coïncide avec l'autre. Si l'on admet les deux propositions suivantes : 1° il existe un système de réseaux et de déplacements, tel qu'il est possible d'amener les mailles à *coïncider* entre elles, deux mailles qui coïncident étant dites égales ; 2° deux mailles qui coïncident sont égales avant la coïncidence et restent égales lorsqu'on les sépare ; on dit alors que le déplacement a lieu *sans déformation*, ou encore qu'il y a déplacement d'une *figure invariable*. Un tel système de réseaux et de déplacements définit une métrique, et l'ensemble de tous les déplacements, un groupe. On dira alors que l'espace *a été géométré euclidiennement*, *riemanniennement*[1], *etc*. Mais l'espace en soi, l'espace vide de Newton, n'a pas de forme ; il n'est même pas certain qu'il ait une réalité physique, et c'est improprement s'exprimer que de parler de l'espace euclidien, lobatchefskien, riemannien. Seul le réseau de lignes et de surfaces et les déplacements des mailles de ce réseau qu'on imagine lui donnent une forme par métaphore. Dire que l'espace impose une courbure aux figures qui y sont plongées est aussi absurde que de prétendre qu'une feuille de papier blanc impose sa forme au quadrillage formé de droites se coupant perpendiculairement ou de cercles se coupant orthogonalement qu'on peut y tracer indifféremment. L'expression de Riemann, « courbure de l'espace en un point », se rapporte à la façon de géométrer, et par suite de mesurer l'espace, non à l'espace lui-même. Tout ce qu'elle désigne, c'est ceci : une fois posée la libre mobilité des figures, l'élément linéaire *ds*, qui joint deux points infiniment voisins, ne

[1] Ed. Guillaume, *les Bases de la Physique moderne*, ap. *Arch. Sc. phys. et nat.*, janvier 1917. — Le néologisme *géométrer* a été introduit par M. Cailler dans un travail très remarquable sur *les Equations du Principe de relativité et la Géométrie*, ap. *Arch. Sc. phys. et nat.*, 1913, p. 109.

peut plus recevoir que trois expressions analytiques qui correspondent aux trois métriques d'Euclide, de Lobatchefski et de Riemann. Or, comme dans les métriques figure un certain paramètre, susceptible de prendre une infinité de valeurs positives ou négatives, l'expression de l'élément linéaire, en géométrie non-euclidienne, contient nécessairement ce même paramètre. C'est lui auquel Riemann donne le nom malencontreux de « courbure d'espace », désignant par là un simple invariant de la forme $\Sigma a_{ik}, dx_i, dx_k$ qui se rapporte, non à une propriété intrinsèque de l'espace, mais à la détermination métrique choisie pour le mesurer.

En résumé, l'espace n'est ni plan, ni courbe, ni euclidien, ni lobatchefskien, ni riemannien ; mais on peut lui appliquer indifféremment, sans modifier en quoi que ce soit sa nature propre, une des trois métriques[1]. On évitera les équivoques sans cesse renaissantes créées par Riemann en se servant d'un langage plus correct ; en disant, par exemple, *courbure de la détermination métrique d'un espace en un point*, ou, mieux encore, en se servant de l'expression employée par Gauss de *constante spatiale*, qui est égale à l'inverse de la racine carrée de l'expression de la courbure donnée par Riemann. Pareillement, les termes : *espace euclidien*, *espace lobatchefskien*, devront être entendus comme des expressions particulièrement elliptiques, mises pour : *espace géométré euclidiennement*, *espace géométré lobatchefskiennement*, *etc.*

Comme conséquence de la précédente équivoque, certains philosophes ont cru que les espaces non-euclidiens ne comportent que des figures à courbure constante positive ou négative, si bien que l'existence des droites et des plans ordinaires prouverait que l'espace est euclidien. A prendre les choses de ce biais, comme il existe des

[1] Comp. *Réponse à quelques critiques*, *R. M. M.*, janvier 1897, p. 68.

sphères et des pseudosphères dans l'espace ordinaire et que l'on peut tracer des géodésiques sur ces surfaces, il faudrait soutenir que l'espace est tout à la fois euclidien, lobatchefskien et riemannien, ce qui est absurde. De plus, comme Barbarin l'a établi : en partant des métriques de Lobatchefski et de Riemann, on peut définir des surfaces et des lignes qui ont les mêmes propriétés que le plan et la droite d'Euclide, de même que, en partant de la géométrie euclidienne, on peut définir des surfaces et des lignes qui possèdent les mêmes propriétés intrinsèques que les droites et les plans de Lobatchefski et de Riemann. On est alors mal venu à déclarer, comme M. Berthelot dans sa critique de Poincaré : « *Toute géométrie non-euclidienne peut donc être considérée comme un langage pour parler de certains rapports euclidiens et l'inverse n'est pas vrai :* il y a des rapports donnés dans l'espace euclidien auxquels ne correspond aucun rapport dans aucun espace non-euclidien : ce sont les rapports qu'entraîne l'existence de la ligne droite et du plan ordinaire, caractéristiques de l'espace euclidien[1]. »

Ainsi, en aucun cas, on ne saurait donner un sens raisonnable à ces expressions : espace euclidien, espaces non-euclidiens, si l'on entend par là que l'espace, dans ces différents cas, aurait une contexture différente. La géométrie traditionnelle n'est pas une « science de l'espace » (l'*Analysis Situs* seule mériterait ce nom en un certain sens), c'est seulement l'étude d'une des façons de *géométrer* l'espace qui, par lui-même, est amorphe ; ou, autrement dit, c'est l'étude d'un groupe. « Or, de semblables groupes on peut en rencontrer en étudiant la géométrie ordinaire, ou encore la géométrie non-euclidienne, ou la géométrie à quatre dimensions ; ou enfin en étudiant des transformations qui n'ont rien à faire avec l'espace. Dès lors, pour

[1] *Un romantisme utilitaire*, t. I, p. 390.

étudier la structure du groupe formé par les mouvements des corps solides, *il n'est pas nécessaire de rien savoir d'avance sur les relations métriques de l'espace, ni même de se rappeler qu'on opère sur l'espace*[1]. » La plupart des équivoques signalées disparaîtraient, si, au lieu de se servir du terme général de géométrie appliqué à la discipline d'Euclide, on se servait du terme plus spécial de *métrique euclidienne*, en se rappelant qu'une métrique, et par suite le postulat des parallèles, ne peut rien nous apprendre touchant la nature et les propriétés intrinsèques de l'espace, pas plus qu'un système de mesure ne nous renseigne sur l'essence propre des grandeurs physiques mesurées.

IV La théorie de Russell.

Russell[2] a soutenu une théorie qui s'accorde avec le Kantisme pour considérer les axiomes géométriques, à l'exception du postulatum, comme des conditions indispensables de l'expérience et, par suite, comme vrais *a priori*; qui se sépare du Kantisme en ce que, au lieu de considérer ces axiomes comme des jugements synthétiques *a priori*, elle enseigne qu'ils peuvent être déduits *analytiquement* de la croyance à la possibilité de l'expérience ; qui fait, enfin, sa part à l'empirisme, en tenant le postulatum d'Euclide pour une vérité d'expérience.

Cette théorie composite, qui additionne en quelque sorte les erreurs que n'avait cessé de dénoncer Poincaré, devait fournir à celui-là une occasion particulièrement favorable pour définir son attitude. Aussi ne se fit-il pas faute de la critiquer fort minutieusement[3].

[1] *Sur les principes de la Géométrie*, ap. *R. M. M.*, janvier 1900, p. 82.

[2] B. Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, 1897.

[3] Poincaré a consacré deux articles à la discussion de la théorie de Russell, *Des fondements de la Géométrie à propos du livre de M. Russell*, ap. *R. M. M.*, mai 1899 ; *Sur les principes de la Géométrie* (réponse à M. Russell), ap. *R. M. M.*, janvier 1900.

Russell croit qu'il existe une forme d'extériorité qui s'impose à nous *a priori* et ne nous laisse le choix qu'entre trois métriques possibles. Poincaré s'empresse de déclarer et de montrer qu'il existe plusieurs autres formes d'extériorité possibles, et qu'elles « sont seulement rejetées comme moins commodes[1] .» Il faut entendre par là, comme il le dit ailleurs, que « l'espace représentatif peut s'adapter à une foule de géométries différentes, qu'il n'est par lui-même ni plan, ni courbe, qu'il n'est par lui-même ni forcément homogène, ni nécessairement isotrope, qu'on n'est pas obligé de lui attribuer trois dimensions[2]. » Traduit en langage algébrique, cette profession revient à dire que nous avons dans l'esprit l'idée d'un grand nombre de groupes. « Parmi tous ces groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'*étalon* auquel nous rapporterons les phénomènes naturels. L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait connaître, non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode*[3]. »

[1] *R. M. M.*, mai 1899, p. 271.
[2] *Réponse à quelques critiques*, ap. *R. M. M.*, p. 68.
[3] *S. H.*, p. 91.

CHAPITRE VIII

CONCLUSION

Il apparaîtra un jour que la découverte des géométries non-euclidiennes a été l'origine d'une révolution considérable dans nos idées sur la théorie de la connaissance, et, par suite, dans nos conceptions métaphysiques sur l'homme et sur l'Univers. On peut dire d'un mot qu'elles ont conduit à rejeter le dilemme classique dans lequel la logique traditionnelle prétendait enfermer l'épistémologie : les principes des sciences sont des *vérités apodictiques* (jugements analytiques ou synthétiques *a priori*), ou des *vérités assertoriques* (jugements empiriques ou intuitifs). Poincaré, s'inspirant des travaux de Lobatchefski et de Riemann, a montré, dans le cas particulièrement significatif de la géométrie, qu'une autre solution est de mise : les principes peuvent être de simples *conventions facultatives*.

Une proposition est un jugement susceptible de vérité ou de fausseté ; une convention facultative est un décret, issu d'un choix volontaire, qui ne peut être vrai ou faux, mais seulement plus ou moins opportun : il ne s'impose pas à l'assentiment de notre entendement, mais se propose à l'acquiescement de notre volonté qui demeure toujours libre de l'accepter ou de le rejeter. Une proposition se reconnaît indubitablement à ce signe : *on conçoit toujours la possibilité d'administrer la preuve*

de la fausseté de sa contradictoire; une convention facultative se révèle infailliblement à cette marque : *on peut la remplacer par la convention opposée, sans modifier autre chose que le langage scientifique.* La vérité d'une proposition est déterminée d'une façon univoque ; le choix d'une convention n'est jamais unilatéralement imposé. Les conventions fixent le langage de la science qui peut être indéfiniment varié : ces conventions une fois posées, les faits que la science exprime sont des propositions nécessairement vraies ou fausses : apodictiquement vraies en mathématiques, si on peut les déduire d'un système de conventions initiales à l'aide des seules règles de la logique formelle ; assertoriquement vraies dans les sciences de la nature, si l'expérience permet de les vérifier directement ou médiatement dans leurs conséquences éloignées[1]. D'autres conventions demeurent possibles, conduisant à d'autres façons de s'exprimer ; mais la vérité, ainsi diversement traduite, reste la même. On peut passer d'un système de conventions à un autre, d'un langage à un autre, au moyen d'un dictionnaire approprié. La possibilité même d'une traduction montre ici l'existence d'un invariant : déchiffrer un document cryptographique, c'est chercher ce qui demeure invariant lorsqu'on en permute les lettres[2].

Une série d'énonciations, considérées jusqu'alors : par les Rationalistes, comme des vérités absolument nécessaires, indépendantes de notre esprit et de la nature ; par les Criticistes, comme des lois *a priori* de notre sensibilité ou de notre entendement ; par les Empiristes, comme des vérités d'expérience, se révèlent, après la critique de Poincaré, comme de simples conventions. Ces conventions ne sont pas vraies, mais commodes ;

[1] Cf. V. S., p. 206.
[2] Cf. V. S., p. 243-247.

elles ne sont pas nécessaires, mais facultatives : elles ne sont pas imposées par l'expérience, mais seulement suggérées par elle. Loin d'être indépendantes de notre esprit et de la nature, elles n'existent qu'en vertu d'un accord tacite de tous les esprits et dépendent étroitement des contingences extérieures du milieu qui nous sert d'habitat [1].

Si notre géométrie métrique est euclidienne, c'est par suite de la structure de nos solides naturels : placés dans un univers non-euclidien, nous eussions adopté la métrique de Lobatchefski ou de Riemann, et celle d'Euclide nous eût paru paradoxale au point d'être considérée comme absurde. Si notre géométrie projective est ce qu'elle est, c'est grâce à l'homogénéité relative de notre atmosphère : il en serait autrement si nous habitions Jupiter, où nous verrions par une sorte de mirage, d'après M. Kummer, tous les points de la surface de la planète un nombre théoriquement indéfini de fois. Si l'espace nous apparait comme un continuum amorphe à trois dimensions, c'est en vertu de certaines expériences psycho-physiologiques, analysées par Poincaré, qui auraient pu conduire, et qui conduisent quelquefois, à d'autres résultats, si bien que nous eussions attribué à l'espace un plus grand nombre de dimensions. Adopter l'axiome des trois dimensions et les axiomes métriques, c'est élire un certain nombre de conventions parmi d'autres possibles, au même titre que choisir une notation vectorielle, un système métrique ou un type de thermomètre. Ces conventions se rapportent au langage variable de la science, non à la réalité invariante qu'elle exprime. Bien que facultatives, elles ne sont toutefois pas arbitraires. Elles sont motivées par des raisons de commodité théorique et de

[1] Cf. L. Rougier, *Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires*, ap. *la Phalange*, 20 juillet 1913, p. 1-20.

convenance pratique. Elles apparaissent dans l'histoire comme le fruit spontané d'un opportunisme empirique.

En prenant les axiomes de la géométrie comme exemples typiques de vérités éternelles ou de jugements synthétiques *a priori*, il apparaît alors que les Rationalistes et les Criticistes se sont abusés bien autrement que les Empiristes. Ils ont pris pour apodictique ce qu'il y a justement de moins nécessaire dans la science : les conventions par lesquelles le savant fixe le langage de la science, et qu'il a choisies librement parmi d'autres possibles. On aboutit ainsi à cette conclusion capitale : *Les propositions géométriques, citées par les Rationalistes et les Criticistes comme exemples les plus probants de vérités* a priori *et apodictiquement nécessaires, ne sont que des conventions commodes, suggérées par l'expérience, qui ne nous paraissent naturelles, au point de passer pour des vérités évidentes par elles-mêmes indépendamment de notre esprit, qu'en vertu de contingences empiriques du milieu qui nous sert d'habitat; et qui, si nous étions transportés dans d'autres milieux, nous paraîtraient si arbitraires que nous les tiendrions pour absurdes.*

NOTE A

Poincaré a écrit dans *S. H.*, p. 90 : « Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement. » Certains critiques ont vu dans ce passage une profession de criticisme. Mais cette leçon est absolument erronée. L'expression *forme de l'entendement* n'a pas, chez Poincaré, le sens technique qu'il a chez Kant. C'est ce qui suit du rapprochement du texte précédent avec le texte suivant : « L'expérience nous apprend seulement que les déplacements se comportent *à peu près* comme les substitutions d'un groupe d'ordre 6. Ce n'est donc pas l'expérience qui nous fournit la notion de ce groupe. Cette notion préexiste, ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit c'est la puissance de former cette notion. L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance. » *(R. M. M.*, janvier 1917, p. 647.) La raison qu'invoque Poincaré pour établir que la notion de groupe ne dérive pas de l'expérience, mais préexiste en puissance dans notre esprit, semble, du reste, contestable : Cf. *les Paralogismes du Rationalisme*, chap. XIII.

NOTE B

H. Poincaré applique-t-il sa théorie de la convention à tous les axiomes de la géométrie ordinaire ? Ces axiomes peuvent se répartir en cinq groupes, comme l'a établi David Hilbert. « Pour quatre de ces groupes, déclare Poincaré, j'ai eu l'occasion de dire dans quelle mesure il est légitime de les regarder comme ne renfermant que des définitions déguisées. » Ces axiomes sont des conventions justifiées : « Pour les axiomes des autres groupes, je tiens qu'elles sont justifiées parce que ce sont celles qui s'accordent le mieux avec certains faits expérimentaux qui nous sont familiers, et qu'elles nous sont par là les plus commodes ; pour les axiomes de l'ordre, il me semble qu'il y a quelque chose de plus, que ce sont de véritables propositions intuitives, se rattachant à l'*Analysis situs* » *(D. P.*, p. 94-96). Il semble résulter de là que les quatre premiers groupes d'axiomes sont, pour Poincaré, des conventions justifiées par des raisons empiriques, comme c'est le cas pour le postulat d'Euclide. La réserve qu'il introduit pour les axiomes de l'*Analysis situs* est la suivante : ces axiomes sont directement issus de l'intuition spatiale du continu sensible. L'intuition dont il s'agit n'est pas celle de l'espace géométrique, qui n'est qu'un concept, ni celle d'une forme pure a *priori* de la sensibilité « intermédiaire entre l'espace sensible que l'on peut se représenter et l'espace analytique, sur lequel on ne peut que raisonner. » *(R. M. M.*, janvier 1897, p. 70.) C'est celle du continu sensible, à laquelle se rattache la faculté que nous avons « de construire un continu physique et mathématique » à deux, à trois, ou même à quatre dimensions.

BIBLIOGRAPHIE

CHRONOLOGIE DES ARTICLES DE POINCARÉ SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

---

1. Sur les Hypothèses fondamentales de la Géométrie *(Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, 1886-1887, 2 novembre 1887, p. 203-216).
2. Les Géométries non-euclidiennes *(Revue générale des Sciences pures et appliquées*, t. II, 15 décembre 1891, p. 769-774).
3. Lettre de H. Poincaré à M. Mouret *(Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 30 janvier 1892, p. 74-75).
4. L'Espace et la Géométrie *(Revue de Métaphysique et Morale*, 3e ann., novembre 1895, p. 631-646).
5. Réponse à quelques critiques *(Revue de Métaphysique et Morale*, 5e année, janvier 1897, p. 59-70).
6. On the Foundations of Geometry *(The Monist*, vol. IX, 1898-1899, octobre 1898, p. 1-43).
7. Des fondements de la Géométrie à propos du livre de M. Russell *(Revue de Métaphysique et Morale*, 7e année, mai 1899, p. 251-279).
8. Sur les principes de la Géométrie (réponse à M. Russell) *(Revue de Métaphysique et Morale*, 8e année, janvier 1900, p. 73-86).
9. Note du *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse, 7e éd., 1909, t. II, p. 582-593.
10. Fondements de la Géométrie *(Journal des Savants*, mai 1902, p. 252-271).
11. L'Espace et ses trois dimensions *(Revue de Métaphysique et Morale*, 11e année, mai et juillet 1903, p. 281-301, 407-429).
12. La Relativité de l'Espace *(l'Année psychologique*, t. XIII, 1907, p. 1-17).
13. Pourquoi l'Espace a trois dimensions *(Revue de Métaphysique et Morale*, 20e année, juillet 1912, p. 483-504).
14. L'Espace et le Temps *(Scientia*, t. XII, 1912, p. 159-171).

ERRATUM

Page 22, dernière ligne, *au lieu de :* professionnelles, *lire :* propositionnelles.

TABLE DES MATIÈRES

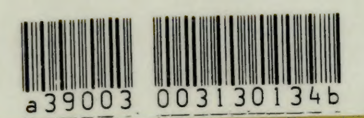
PREMIÈRE PARTIE

Prolégomènes logiques et mathématiques
Les géométries non-euclidiennes.

DEUXIÈME PARTIE

La théorie conventionaliste des axiomes géométriques.

Lyon. — Imprimerie A. Rey, 4, rue Gentil. — 78659


a39003 003130134b